

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

EXTRAORDINARIA – 2022

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con tres ejercicios. En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a dos de un bloque y a uno de cada bloque restante. Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuesta a qué cuatro ejercicios se responden en el examen. Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

1º) Usamos una balanza de brazos muy sensible para pesar tres tipos de piezas (A, B y C) comparando su peso con el de una barrita que sabemos que pesa 13 gramos. Todas las piezas de un mismo tipo pesan igual. Descubrimos que:

1---- La barrita pesa lo mismo que una pieza C y dos piezas B juntas.

2---- Tres piezas A pesan lo mismo que dos piezas B.

3---- Una pieza C pesa lo mismo que dos piezas A y una pieza B.

¿Cuánto pesan las piezas de cada tipo?

Si la relación 3---- hubiera sido de una pieza B pesa como dos piezas A y una pieza C, al resolver el problema nos daríamos cuenta de que alguna relación debería ser falsa.

¿Por qué?

Sean x, y, z el peso de las piezas de los tipos A, B y C, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado, expresado en miles de euros, es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} z + 2y = 13 \\ 3x = 2y \\ z = 2x + y \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2y + z = 13 \\ 3x - 2y = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{array} \right\}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 13 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 4 + 6 = 13 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } A = 3.$$

$$\underline{\text{Rang } A = \text{Rang } A' = 3 = n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D}}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{13 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{3+4+6} = \frac{13 \cdot 2}{13} = 2.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 13 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{13} = \frac{-13 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{13} = \frac{-13 \cdot (-3)}{13} = 3.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 13 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{13} = \frac{13 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{13} = 3 + 4 = 7.$$

Las piezas A pesan 2 gramos, las B, 3 gramos y las C, 7 gramos.

Si una pieza B pesa como dos piezas A y una pieza C, el sistema es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} 2y + z = 13 \\ 3x - 2y = 0 \\ y = 2x + z \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2y + z = 13 \\ 3x - 2y = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{array} \right\}$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son, ahora, las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 13 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 4 - 6 = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M = 3.$$

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^o\ incóg. \Rightarrow S.C.D}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{13 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{13 \cdot 2}{-5} = -\frac{26}{5}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 13 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-13 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{13 \cdot 3}{5} = \frac{39}{5}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 13 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{13 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{13 \cdot (-3+4)}{-5} = -\frac{13}{5}.$$

Las soluciones carecen de sentido: no puede ser el peso negativo.

2º) Una matriz cuadrada A se dice idempotente si $A^2 = A$.

a) Estudia si hay matrices idempotentes 2×2 que sean de la forma $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ o de la forma $\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$. En cada caso debes indicar, si la respuesta es afirmativa, el valor de a y b.

b) Si una matriz A es idempotente, calcula su potencia $A^{2.022}$.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+a & 2+b \\ 2a+ab & a+b^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 4+a & 2+b \\ 2a+ab & a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4+a=2 \\ a(2+b)=a \\ 2+b=1 \\ a+b^2=b \end{cases} \Rightarrow a = -2; b = -1.$$

$$\underline{A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \text{ es idempotente para } a = -2 \text{ y } b = -1.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+ab & 2b+b \\ 2a+a & ab+1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 4+ab & 2b+b \\ 2a+a & ab+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4+ab=2 \\ 3a=a \\ 3b=b \\ ab+1=1 \end{cases} \Rightarrow a, b \notin R.$$

$$\underline{A = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} \text{ no es idempotente para } a, b \in R.}$$

b)

Las potencias sucesivas de A son las siguientes:

$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A.$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A.$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A.$$

$$\text{En general: } A^n = A, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\underline{\text{Si A es idempotente: } A^{2.022} = A.}$$

3º) Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) que cumplen las siguientes condiciones: $0 \leq y$; $0 \leq x$; $x + y \leq 6$; $2x + y \leq 10$; $x + 2y \leq 10$. Averigua el valor máximo que alcanza en dicha región la función $f(x, y) = 4x + 3y$. Si dicho valor máximo se alcanza en un punto $P_0(x_0, y_0)$, ¿sabrías expresar una función cuyo máximo lo alcance en $Q_0(y_0, x_0)$?

$$\textcircled{1} \Rightarrow x + y \leq 6 \Rightarrow y \leq 6 - x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$$

x	0	6
y	6	0

$$\textcircled{2} \Rightarrow 2x + y \leq 10 \Rightarrow y \leq 10 - 2x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$$

x	5	2
y	0	6

$$\textcircled{3} \Rightarrow x + 2y \leq 10 \Rightarrow y \leq \frac{10-x}{2} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$$

x	0	4
y	5	3

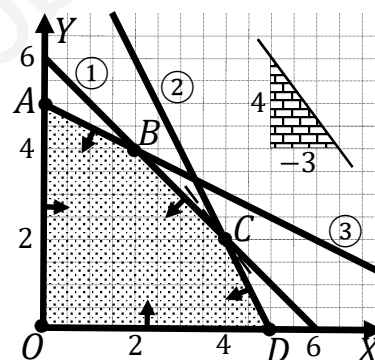
La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x + 2y = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 5 \Rightarrow A(0, 5).$$

$$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 6 \\ x + 2y = 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -x - y = -6 \\ x + 2y = 10 \end{array} \Rightarrow y = 4;$$

$$x = 2 \Rightarrow B(2, 4).$$



$$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 6 \\ 2x + y = 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -x - y = -6 \\ 2x + y = 10 \end{array} \Rightarrow x = 4; y = 2 \Rightarrow C(4, 2).$$

$$D \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ 2x + y = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 10; x = 5 \Rightarrow D(5, 0).$$

La función de objetivos es $f(x, y) = 4x + 3y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 5) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 0 + 15 = 15.$$

$$B \Rightarrow f(2, 4) = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 8 + 12 = 20.$$

$$C \Rightarrow f(4, 2) = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 16 + 6 = 22.$$

$$D \Rightarrow f(5, 0) = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 0 = 20 + 0 = 20.$$

El valor máximo se produce en el punto $C(4, 2)$.

También se hubiera obtenido el punto $C(4, 2)$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 4x + 3y \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x \Rightarrow m = -\frac{4}{3}.$$

El valor máximo se alcanza en $C(4, 2)$ y su valor es 22.

Si quisiéramos que el máximo se alcanzase en el punto $C'(2, 4)$, debemos observar que se han cambiado las coordenadas, es decir: se cambia la "x" por la "y" y la "y" por la "x", por lo cual, la nueva función sería $g(x, y) = 3x + 4y$.

Bloque 2. Análisis.

4º) Consideramos la función $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$ (en los valores reales de x donde la expresión tiene sentido).

a) ¿Cuál es el dominio de la función?

b) Calcula la derivada $f'(x)$. ¿En qué puntos x es $f'(x) = -1$? ¿En cuáles es $f'(x) = 1$? ¿Tiene f extremos relativos?

c) Dibuja la gráfica de f , señalando los cortes con los ejes y las asíntotas horizontales y verticales.

a)

Por ser una función racional su dominio es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x - 1 = 0; \quad x = 1 \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R - \{1\}}.$$

b)

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (x-1) - (3x-2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{3x-3-3x+2}{(x-1)^2} \Rightarrow \underline{f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}}.$$

$$f'(x) = -1 \Rightarrow \frac{-1}{(x-1)^2} = -1 \Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow x = 0.$$

$$\underline{f'(x) = -1 \text{ para } x = 0.}$$

$$f'(x) = 1 \Rightarrow \frac{-1}{(x-1)^2} = 1; \quad (x-1)^2 = -1; \quad x^2 - 2x + 1 = -1;$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0; \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \Rightarrow x \notin R.$$

$$\underline{\text{No existe ningún valor real de } x \text{ para el cual } f'(x) = 1.}$$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x \notin R \Rightarrow \underline{f(x) \text{ no tiene extremos relativos.}}$$

c)

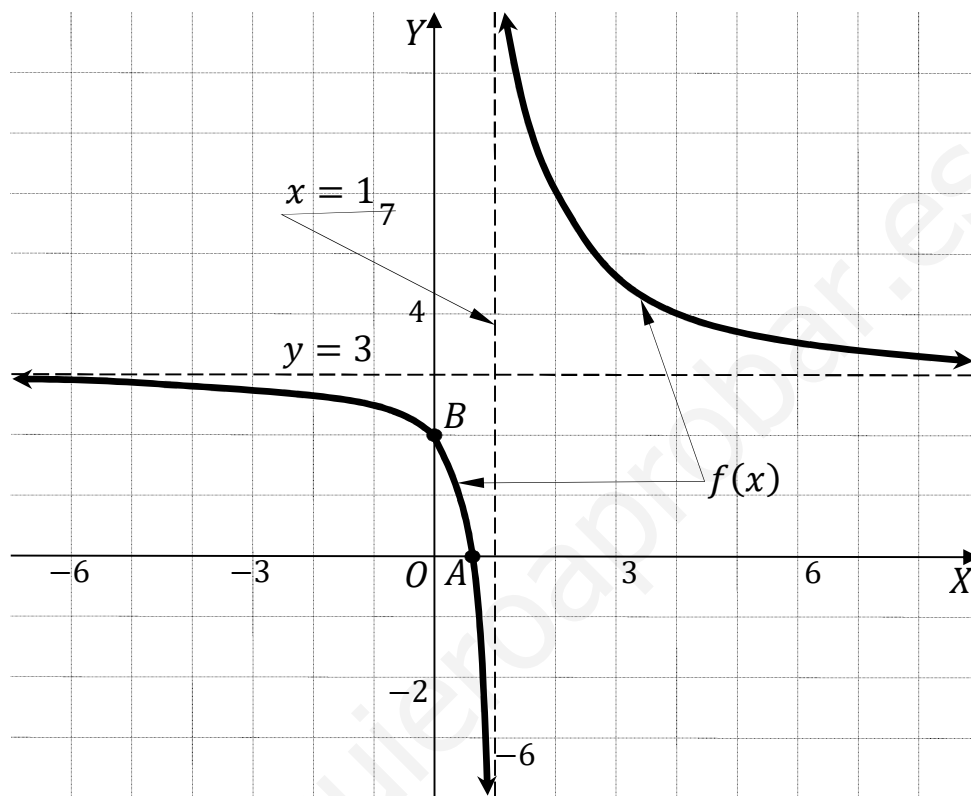
Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$\text{Eje } X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x-2}{x-1} = 0; \quad 3x - 2 = 0; \quad x = \frac{2}{3} \Rightarrow A\left(\frac{2}{3}, 0\right).$$

$$\text{Eje } Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{3 \cdot 0 - 2}{0 - 1} = \frac{-2}{-1} = 2 \Rightarrow B(0, 2).$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2}{x - 1} = 3 \Rightarrow \text{La recta } y = 3 \text{ es asíntota horizontal.}$$

Con los datos obtenidos puede hacerse, aproximadamente, la representación gráfica de la función que es la siguiente:



5º) Encuentra los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = x^3 - ax^2 - bx + 1$ cumpla las dos propiedades siguientes:

(1) Su derivada vale lo mismo en $x = 0$ y en $x = 1$.

(2) Tiene un extremo relativo en $x = -1$.

¿Qué propiedad cumplen las rectas tangentes a la gráfica $y = f(x)$ en los puntos de abscisa 0 y 1? ¿Qué tipo de extremo relativo (máximo o mínimo) tiene f en -1 .

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax - b.$$

$$f'(0) = f'(1) \Rightarrow 3 \cdot 0^2 - 2a \cdot 0 - b = 3 \cdot 1^2 - 2a \cdot 1 - b;$$

$$-b = 3 - 2a - b; \quad 2a = 3 \Rightarrow \underline{a = \frac{3}{2}}.$$

$$\text{La derivada resulta: } f'(x) = 3x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x - b \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3x - b.$$

$$\text{Por tener un extremo relativo en } x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0:$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - b = 0; \quad 3 + 3 - b = 0 \Rightarrow \underline{b = 6}.$$

$$\text{La derivada resulta, finalmente: } f'(x) = 3x^2 - 3x - 6.$$

$$f'(0) = f'(1) = -6.$$

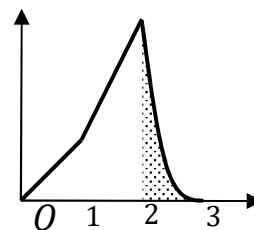
Las tangentes a la gráfica de $f(x)$ para $x = 0$ y $x = 1$ tienen pendiente -6 .

$$f''(x) = 6x - 3 \Rightarrow f''(-1) = 6 \cdot (-1) - 3 < 0 \Rightarrow \text{Máximo}.$$

Para $x = -1$ la función $f(x)$ tiene un máximo relativo.

6º) El diseño del nuevo logo de Climbing Sports se ajusta en altura a la gráfica de la

$$\text{función } f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2x + a & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ b(x-3)^2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$



a) Calcula los valores de a y b .

b) El material de la parte sombreada elevará el coste de producción de las prendas de la marca. ¿Cuánto vale el área de dicha parte sombreada?

a)

La función $f(x)$ tiene que ser continua.

La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, excepto para $x = 1$ y para $x = 2$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a y b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + a) = 2 + a = f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 = 2 + a \Rightarrow \underline{a = -1}.$$

$$\text{La función resulta: } f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ b(x-3)^2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

$$\text{Para } x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [b(x-3)^2] = b = f(2) \end{cases} \Rightarrow$$

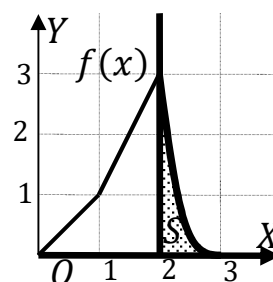
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow \underline{b = 3}.$$

b)

$$\text{La función es } f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 3(x-3)^2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

$$S = \int_2^3 3(x-3)^2 \cdot dx = 3 \cdot \int_2^3 (x-3)^2 \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-3 = t \mid x=3 \rightarrow t=0 \\ dx = dt \mid x=2 \rightarrow t=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow S = 3 \cdot \int_{-1}^0 t^2 \cdot dt = 3 \cdot \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^0 = [t^3]_{-1}^0 =$$



$$= 0 - [(-1)^3] = 1 \Rightarrow \underline{S = 1 u^2}.$$

www.yoquieroaprobar.es

Bloque 3. Estadística y probabilidad.

7º) Un amigo meteorólogo nos ha facilitado algunas probabilidades de lluvia en la mañana del próximo sábado, concretamente para los siguientes sucesos:

$A = \text{"Hay lluvia entre las 8 y las 9"}$.

$B = \text{"Hay lluvia entre las 8 y las 10"}$.

$C = \text{"Hay lluvia entre las 10 y las 14"}$.

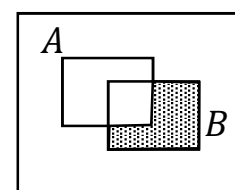
Nos ha dicho que $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,5$; $P(C) = 0,7$. A nosotros nos interesa sobre todo la probabilidad de $D = \text{"Hay lluvia entre las 9 y las 10"}$. No nos la ha dado, pero nos ha dicho que $P(A \cap D) = 0,35$.

a) ¿Cómo interpretarías $P(B) - P(A)$? Calcula entonces el valor de $P(D)$. ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva de 9 a 10?

b) Nos dice además que B y C son independientes, porque estará despejado entre las 10 y las 12. Calcula entonces la probabilidad de que llueva durante la mañana (entre las 8 y las 14).

a)

De forma gráfica $P(B) - P(A)$ es la zona sombreada de la figura adjunta, que equivale a la probabilidad de B condicionada a que no se produzca A: $P(B) - P(A) = P(B/\bar{A})$.



$$B \cap \bar{A} = B - (A \cap B)$$

Datos: $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,5$; $P(C) = 0,7$.

Sabemos que $P(B) = P(A \cup D) = 0,5$ y también que $P(A \cap D) = 0,35$, lo cual permite calcular $P(D)$:

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) \Rightarrow 0,5 = 0,4 + P(D) - 0,35;$$

$$P(D) = 0,5 - 0,4 + 0,35 \Rightarrow \underline{P(D) = 0,45}. \quad P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,45 = 0,55.$$

La probabilidad de que no llueva de 9 a 10 es $0,55 = 55\%$.

b)

Dos sucesos B y C son independientes cuando $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) \Rightarrow$
 $\Rightarrow P(B \cap C) = 0,5 \cdot 0,7 = 0,35$.

La probabilidad de que llueva entre las 8 y las 14 horas es $P(B \cup C)$.

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0,5 + 0,7 - 0,35 = 0,85.$$

La probabilidad de que llueva entre las 8 y las 14 horas es $0,85 = 85\%$.

8º) Al 40 % de la población española no le gusta el vino. En España, de cada 1.000 personas 7 son riojanas, pero entre quienes gustan del vino la proporción de personas riojanas es 1/120. Escogemos una persona española al azar y resulta que es riojana. ¿Cuál es la propiedad de que le guste el vino?

$$\text{Datos:} \begin{cases} \text{Probabilidad de gustar del vino: } P(V) = 0,6 \\ \text{Probabilidad de ser riojano: } P(R) = \frac{7}{1.000} \\ P(R/V) = \frac{1}{120} \end{cases} .$$

Nos piden: $P(V/R)$. Aplicando el teorema de Bayes:

$$P(V/R) = \frac{p(V \cap R)}{P(R)} = \frac{p(V) \cdot P(R/V)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{120} \cdot 0,6}{\frac{7}{1.000}} = \frac{0,6 \cdot 1.000}{120 \cdot 7} = \frac{60}{84} = \underline{0,7143}.$$

9º) En los poblados maruba utilizan el punde como medida de distancia, y toman lo largo de una valla para fijar su valor. Este es distinto en cada poblado. Queremos estimar el valor medio de los distintos pundes en metros, considerando que la distribución es normal con desviación típica de 4 metros y que las medidas en todos los poblados son independientes entre sí. A partir de una muestra de 25 pundes calculamos un intervalo de confianza para situar dicho valor medio, y resulta el intervalo (74,864; 77,496).

a) ¿Cuál es el valor promedio de nuestra muestra?

b) ¿Con qué nivel de confianza hemos obtenido el intervalo?

c) ¿Cuántos pundes necesitaríamos medir para reducir el error muestral a la mitad, con el mismo nivel de confianza?

a)

$$\bar{x} = \frac{77,496 + 74,864}{2} = \frac{152,360}{2} \Rightarrow \bar{x} = 76,175.$$

b)

$$E = \frac{77,496 - 74,864}{2} = \frac{2,632}{2} = 1,316.$$

Datos: $\sigma = 4$; $n = 25$; $E = 1,316$.

Sabiendo que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: $z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{1,316 \cdot \sqrt{25}}{4} = 0,329 \cdot 5 = 1,645$.

Mirando en la tabla $N(0, 1)$: $\left\{ \begin{matrix} 1,64 - -0,9495 \\ 1,65 - -0,9505 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 1,645 = 0,9500$.

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95; \quad 2 - \alpha = 1,90; \quad \alpha = 2 - 1,90 = 0,10 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,90.$$

El nivel de confianza fue del 90 %.

c)

$$E' = \frac{E}{2} = \frac{1,316}{2} = 0,658.$$

Datos: $\sigma = 4$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645$; $E' = 0,658$.

$$E' = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E'} \right)^2 = \left(\frac{1,645 \cdot 4}{0,658} \right)^2 = 10^2 = 100.$$

Se necesitan 100 pundes.
