PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO - 2000

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas.

OPCIÓN A

1º) Determinar para qué valores de x tiene inversa la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{pmatrix}$ y hallarla en función de x.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{vmatrix}=-x^2-x^2=-2x^2=0 \Rightarrow \underline{x=0}$$

$$\underline{\underline{A \ \ es \ \ inversible \ \ \forall x \in R-\{0\}}}$$

$$A^t=\begin{pmatrix} 0 & x & -x \\ 1 & 0 & 0 \\ x & x & x \end{pmatrix} \ ;; \ Adj\left(A^t\right)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & x \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & x \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x & -x \\ x & x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -x \\ x & x \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & x \\ x & x \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & -x \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -x & x \\ -2x^2 & x^2 & x^2 \\ 0 & -x & -x \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2x} & -\frac{1}{2x} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2x} & \frac{1}{2x} \end{pmatrix}}}$$

****

2º) La ecuación continua de una recta es $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{1}$. Determinar un vector director, las ecuaciones paramétricas de la recta r y un punto de ella cuya primera coordenada sea 7.

Un vector director de la recta r es $\underline{\underline{\overrightarrow{v} = (3,\ 2,\ 1)}}$.

Haciendo $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{1} = k$ se obtienen las ecuaciones paramétricas de r, que son las siguientes:

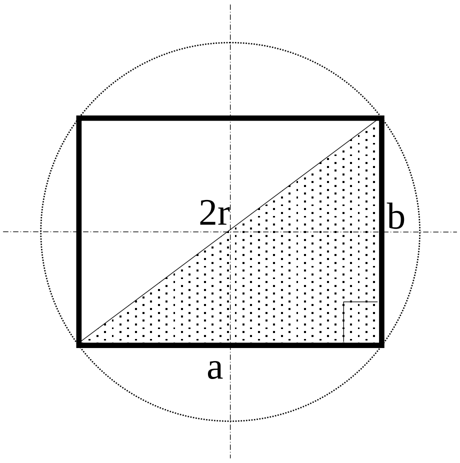
$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 2k \\ z = -3 + k \end{cases}}}$$

Dando a k valores reales se obtienen puntos de r. Si nos piden que la primera componente sea 7, tiene que ser:

$$1 + 3k = 7 \;;;\; 3k = 6 \;;;\; k = 2 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{\underline{P(7,\ 4,\ -1)}}$$

****

3º) Calcular el rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio r > 0.



La superficie del rectángulo es: S = a · b (*)

Del triángulo rectángulo punteado de la figura se deduce, aplicando el teorema de Pitágoras que:

$$(2r)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \underline{b = \sqrt{4r^2 - a^2}}$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de b, quda:

$$S = a \cdot b = a \cdot \sqrt{4r^2 - a^2} = \sqrt{4r^2a^2 - a^4}.$$

Para que la superficie sea máxima es necesario que su derivada sea cero:

$$S' = \frac{8r^2a - 4a^3}{2\sqrt{4r^2a^2 - a^4}} = 0 \Rightarrow 8r^2a - 4a^3 = 0 \;;;\; 4a\left(2r^2 - a^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = r\sqrt{2} \\ a_3 = -r\sqrt{2} \end{cases}$$

Como es lógico, la única solución del problema es $a = r\sqrt{2}$, con lo cual el valor de b es:

$$b = \sqrt{4r^2 - a^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2r^2} = \underline{r\sqrt{2} = b = a}$$

<u>La solución es un cuadrado cuyo lado es el obtenido para a o b.</u>

****

4º) Determinar el valor de a para el cual $\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + ax + 1}\right) = 1$.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + ax + 1}\right) = \infty - \infty \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

(multiplicando y dividiendo por la conjugada de la expresión)

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2x - \sqrt{4x^2 + ax + 1}\right)\left(2x + \sqrt{4x^2 + ax + 1}\right)}{2x + \sqrt{4x^2 + ax + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(2x)^2 - \left(\sqrt{4x^2 + ax + 1}\right)^2}{2x + \sqrt{4x^2 + ax + 1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - \left(4x^2 + ax + 1\right)}{2x + \sqrt{4x^2 + ax + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 - ax - 1}{2x + \sqrt{4x^2 + ax + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-ax - 1}{2x + \sqrt{4x^2 + ax + 1}}$$

(dividiendo numerador y denominador por a, resulta lo siguiente)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + ax + 1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{-ax - 1}{x}}{\frac{2x + \sqrt{4x^2 + ax + 1}}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-a - \frac{1}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{\sqrt{4x^2 + ax + 1}}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-a - \frac{1}{x}}{2 + \sqrt{\frac{4x^2 + ax + 1}{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-a - \frac{1}{x}}{2 + \sqrt{4 + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{-a + 0}{2 + \sqrt{4 + 0 + 0}} = \frac{-a}{4} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{a = -4}}$$

****

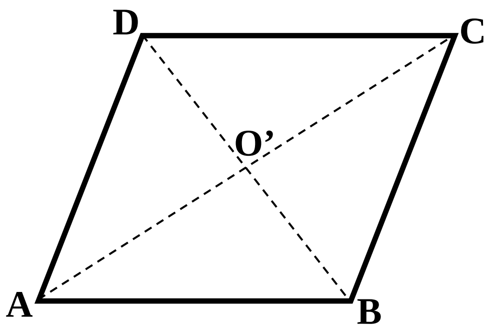
5º) Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1, 1, 1)$ y $B(0, 2, 0)$. El centro del paralelogramo es $O'(0, 0, 1)$. Se pide:

a) Las coordenadas de los otros dos vértices.

b) La ecuación del plano que contiene al paralelogramo.

c) El área del paralelogramo.

Para una mejor comprensión del ejercicio, realizamos un diagrama aproximado de la situación.



a)

$$\overrightarrow{AO'} = \overrightarrow{O'C} \Rightarrow O' - A = C - O' \;;;\; (0, 0, 1) - (1, 1, 1) = (x, y, z) - (0, 0, 1) \;;;$$

$$(-1, -1, 0) = (x, y, z-1) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{C(-1, -1, 1)}}$$

$$\overrightarrow{BO'} = \overrightarrow{O'D} \Rightarrow O' - B = D - O' \;;;\; (0, 0, 1) - (0, 2, 0) = (x, y, z) - (0, 0, 1) \;;;$$

$$(0, -2, 1) = (x, y, z-1) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{D(0, -2, 2)}}$$

b)

Dos vectores directores del plano π pedido, son: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$ y punto puede ser cualquiera de los extremos del paralelogramo, por ejemplo, A(1, 1, 1).

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0, 2, 0) - (1, 1, 1) = \underline{(-1, 1, -1) = \overrightarrow{u}}$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD} = D - A = (0, -2, 2) - (1, 1, 1) = \underline{(-1, -3, 1) = \overrightarrow{v}}$$

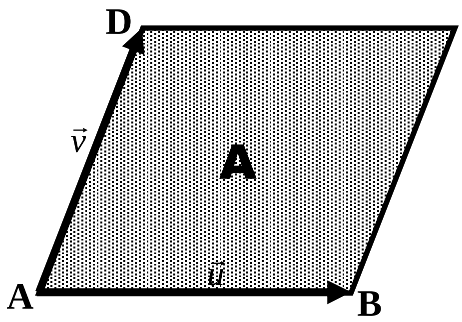
$$\pi(A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;;;$$

$$(x-1) + (y-1) + 3(z-1) + (z-1) - 3(x-1) + (y-1) = 0 \;;;$$

$$-2x + 2 + 2y - 2 + 4z - 4 = 0 \;;;\; -2x + 2y + 4z - 4 = 0 \;;;\; \underline{\underline{\pi \equiv x - y - 2z + 2 = 0}}$$

c)

El área del paralelogramo puede obtenerse de diversas formas. Vamos a utilizar la siguiente: $Área = \left| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \right|$, siendo $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ los vectores que determinan las dimensiones del paralelogramo.



$$Área = \left| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \right| = \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{matrix} \right\| = \left| i + j + 3k + k - 3i + j \right| = \left| -2i + 2j + 4k \right| =$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = \underline{\underline{2\sqrt{6}\ u^2 \cong 4'90\ u^2 = Área}}$$

****

6º) Considerar la integral: $I=\int \frac{\cos x}{(sen\ x)^3}\cdot dx$.

a) Calcularla realizando el cambio de variable sen x = t.

b) Calcular la misma integral, pero haciendo el cambio de variable tag x = t.

c) Se obtiene el mismo resultado? Justificar la respuesta.

----

a)

$$I=\int \frac{\cos x}{(sen\ x)^3}\cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} sen\ x = t \\ \cos x\cdot dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t^3}\cdot dt = \frac{t^{-2}}{-2}+C=\frac{1}{-2t^2}+C=\underline{\underline{-\frac{1}{2\,sen^2\ x}+C}}$$

b)

Antes de realizar el cambio de tag x = t, veamos como se obtienen las distintas expresiones que se utilizan.

$$\underline{tag\ x = t}\ ;;\ \frac{sen\ x}{\cos x}=t \Rightarrow \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x}\cdot dx = dt\ ;;\ \left(1+tag^2 x\right)\cdot dx = dt \Rightarrow \underline{dx=\frac{dt}{1+t^2}}$$

$$sen^2 x + \cos^2 x = 1\ ;;\ tag^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{tag^2 x + 1} \Rightarrow \underline{\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$$

$$sen^2 x + \cos^2 x = 1\ ;;\ sen^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\frac{1}{1+t^2}=\frac{1+t^2-1}{1+t^2}=\frac{t^2}{1+t^2} \Rightarrow \underline{sen\ x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}$$

Según las fórmulas de cambio anteriores:

$$I=\int \frac{\cos x}{(sen\ x)^3}\cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} tag\ x = t\ ;;\ dx=\frac{dt}{1+t^2} \\ sen\ x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\ ;;\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right\} \Rightarrow I=\int \frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\int \frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{t^3}{\left(1+t^2\right)\cdot\sqrt{1+t^2}}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{t^3}=\frac{t^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2t^2}+C=\underline{\underline{-\frac{1}{2\cdot sen^2\ x}+C}}=I$$

c)

Como puede observarse, se obtienen el mismo resultado. La justificación de la respuesta está implícita en el proceso de obtención de la integral, en ambos casos.

****

OPCIÓN B

1º) Determinar para qué valores de x tiene inversa la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{pmatrix}$ y hallarla en función de x.

2º) La ecuación continua de una recta es $r\equiv \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{1}$. Determinar un vector director, las ecuaciones paramétricas de la recta r y un punto de ella cuya primera coordenada sea 7.

3º) Calcular el rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio r > 0.

4º) Determinar el valor de a para el cual $\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+ax+1}\right)=1$.

(Los cuatro primeros ejercicios son los mismos que los de la opción A)

****

5º) Estudiar, según los valores de m, y resolver cuando sea posible el sistema

$$\left.\begin{array}{r} y+z=1 \\ (m-1)x+y+z=m \\ x+(m-1)y-z=0 \end{array}\right\}$$

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 \end{vmatrix}=(m-1)^2+1-1+(m-1)=(m-1)(m-1+1)=m(m-1)=0\Rightarrow\begin{cases} \underline{m_1=1} \\ \underline{m_2=0} \end{cases}$$

$$Para\ \begin{Bmatrix} m\neq 1 \\ m\neq 0 \end{Bmatrix}\Rightarrow\ Rango\,M=Rango\ M'=3=n^o\ incógnitas\ \Rightarrow\ \underline{Compatible\ \ determinado}$$

$Para\ \ m=1\ \ el\ \ rango\ \ de\ \ M'\ \ es:$

$$M'\ \Rightarrow\ \{C_1,\ C_2,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0\ \Rightarrow\ Rango=3$$

$$Para\ m=1 \Rightarrow Rango\ M \neq Rango\ M' \Rightarrow \underline{Incompatible}$$

$Para\ m=0\ el\ rango\ de\ M'\ es:$

$$\left.\begin{array}{l} M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1-1=0 \\ M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1-1=0 \\ M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow Rango\ M'=2$$

$$\underline{\underline{Para\ m=0 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 2 < n \Rightarrow Compatible\ in\det er\min ado}}$$

Vamos a resolver ahora los casos en que es compatible:

Para $\left\{\begin{array}{l} m \neq 1 \\ m \neq 0 \end{array}\right\}$: Aplicando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & -1 \end{vmatrix}}{m(m-1)} = \frac{-1+m(m-1)-(m-1)+m}{m(m-1)} = \frac{-1+m^2-m-m+1+m}{m(m-1)} = \frac{m(m-1)}{m(m-1)} = \underline{\underline{1=x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m-1 & m & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{m(m-1)} = \frac{1-m+m-1}{m(m-1)} = \frac{0}{m(m-1)} = \underline{\underline{0=y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & 0 \end{vmatrix}}{m(m-1)} = \frac{(m-1)^2+m-1}{m(m-1)} = \frac{m^2-2m+1+m-1}{m(m-1)} = \frac{m(m-1)}{m(m-1)} = \underline{\underline{1=z}}$$

Para m = 0 resulta el sistema: $\left.\begin{array}{r} y+z=1 \\ -x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}$.

Observemos que las dos últimas filas son iguales, por lo tanto: $\left.\begin{array}{r} y+z=1 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}$

Parametrizando z, resulta: $\underline{\underline{z=k}}$;; $\underline{\underline{y=1-k}}$;; $\underline{\underline{x=1}}$

****

6º) a) Representar gráficamente la curva $y = x \cdot e^x$.

b) Hallar el área del recinto limitado por la curva $y = x \cdot e^x$, el eje OX y la recta paralela al eje OY que pasa por el punto donde la curva tiene un mínimo relativo.

El dominio de definición es: $\underline{\underline{D(f) \Rightarrow R}}$

Para x = 0, y = 0. La función pasa por el origen de coordenadas.

Vamos a estudiar las asíntotas horizontales (verticales no tiene) cuando x →-∞:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x \cdot e^x\right) = -\infty \cdot e^{-\infty} = -\frac{\infty}{e^{\infty}} = -\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (Aplicando\ L'Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-e^{\infty}} = -\frac{1}{e^{\infty}} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = 0}}\ (Eje\ \ X)$$

Crecimiento y decrecimiento: máximos y mínimos:

$$y' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{e^x(1+x) = y'}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 1 + x = 0\ ;;\ \underline{x = -1} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \to y' > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Creciente: (-1, \infty)}} \\ \\ x < -1 \to y' < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Decreciente: (-\infty, -1)}} \end{cases}$$

$$y'' = e^x \cdot (1+x) + e^x \cdot 1 = \underline{e^x(2+x) = y''} \Rightarrow y''_{(-1)} = \frac{1}{e} \cdot 1 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Mín\left(-1, -\frac{1}{e}\right)}}$$

$$y(-1) = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e} \to \to \to \to \to \to \to \to \to \to \to \to \to \to \uparrow$$

Concavidad y convexidad: puntos de inflexión:

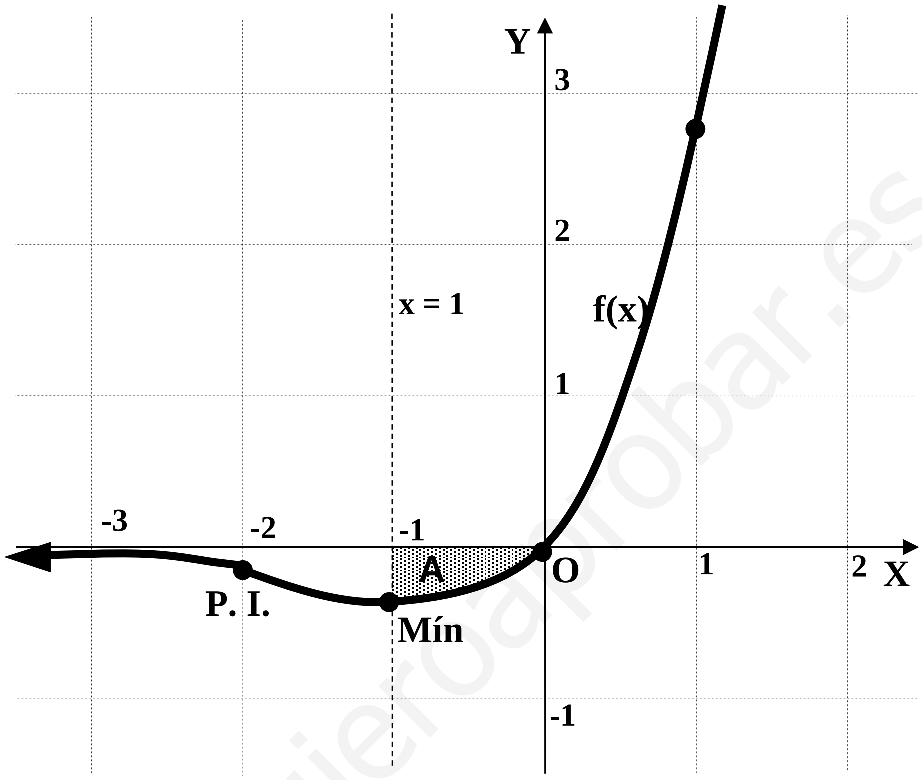
$$y'' = e^x(2+x)\ ;;\ y'' = 0 \Rightarrow 2 + x = 0\ ;;\ \underline{x = -2} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \to y'' > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Concava: (-2, \infty)}}\ \ (\cap) \\ \\ x < -2 \to y'' < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Convexa: (-\infty, -2)}}\ \ (\cup) \end{cases}$$

$$y''' = e^x \cdot (3+x) \Rightarrow y'''_{(-2)} = e^{-2} \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{P.\ I.\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)}}$$

$$y(-2) = -2 \cdot e^{-2} = -\frac{2}{e^2} \to \to \to \to \to \to \to \to \uparrow$$

Para la representación gráfica formamos una tabla de valores que nos facilite su ejecución:

x	0	-1	1	1	2
y	0	$-\frac{1}{e}$	$-\frac{2}{e^2}$	e	$2e^2$
		Mín	P. I.		



b)

$$A=\int_0^{-1} f(x)\cdot dx=\int_0^{-1} x\cdot e^x\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=u\rightarrow dx=du \\ e^x\cdot dx=dv\rightarrow v=e^x \end{array}\right\} \Rightarrow A=\left[x\cdot e^x-\int e^x\cdot dx\right]_0^{-1}=$$

$$=\left[x\cdot e^x-e^x\right]_0^{-1}=\left[e^x(x-1)\right]_0^{-1}=\left[e^{-1}\cdot(-1-1)\right]-\left[e^0\cdot(0-1)\right]=-2\cdot e^{-1}+1=1-\frac{2}{e}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{e-2}{e}\,u^2}}=A \quad \Rightarrow \quad Numéricamente:\ \underline{\underline{A\cong 0'26\ u^2}}$$

****