PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

SEPTIEMBRE - 2000

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas.

OPCIÓN A

1º) Escribir la ecuación implícita del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-8}{4}$ y $s \equiv x = y = z$.

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v} = (2,\ 3,\ 4)$ y de la recta s es $\overrightarrow{w} = (1,\ 1, 1)$.

El plano pedido π es:

$$\pi\left(O;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 3x + 4y + 2z - 3z - 4x - 2y = 0 \ ;;\ \underline{\underline{\pi \equiv x - 2y + z = 0}}$$

****

2º) Calcular A · B y B · A siendo $A = (1, \ -3, \ -1, \ 2)$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = (1, \ -3, \ -1, \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = (3 - 3 - 0 - 4) = \underline{\underline{(-4) = A \cdot B}}$$

(Matriz de una fila y una columna)

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot (1, \ -3, \ -1, \ 2) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & -9 & -3 & 6 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

3º) Hallar los puntos en los que la tangente a la curva $y=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+1$ es perpendicular a la recta $y=\frac{x}{3}+1$.

La derivada de una función en un punto representa la pendiente de la tangente a la función en ese punto.

La pendiente de la recta es $m=\frac{1}{3}$. La pendiente de su perpendicular es m’ = -3.

$$y'=x^2-2x-3 \;\Rightarrow\; y'(a)=m'=-3 \;\Rightarrow\; a^2-2a-3=-3 \;;;\; a^2-2a=0 \;;;\; a(a-2)=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1=0 \;\rightarrow\; y(0)=-3 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P_1(0,\,-3)}} \\ a_2=2 \;\rightarrow\; y(2)=\frac{8}{3}-4-6+1=\frac{8}{3}-9=\frac{8-27}{3}=-\frac{19}{3} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P_2\left(2,\,-\frac{19}{3}\right)}} \end{cases}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

4º) Siendo $|x|$ el valor absoluto o módulo de x, calcular la siguientes integral definida: $I=\int_{-1}^{2}|x|\cdot dx$.

La función $f(x)=|x|$ se puede redefinir de la forma $f(x)=\begin{cases} x & si \quad x\geq 0 \\ -x & si \quad x<0 \end{cases}$.

Por otra parte, f(x) es continua en su dominio, que es R; $f(x)\geq 0,\ \forall x\in R$; con estas características y teniendo en cuenta que: $\int_a^c f(x)\cdot dx=\int_a^b f(x)\cdot dx+\int_b^c f(x)\cdot dx$, siendo a < b < c.

$$I=\int_{-1}^{2}|x| \cdot dx=\int_{-1}^{0}-x \cdot dx+\int_{0}^{2}x\cdot dx=\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2}=0-\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{2}-0=\frac{1}{2}+2=\underline{\underline{\frac{5}{2}\ u^2=I}}$$

****

5º) Escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-1, 0, 1)$ y $B(1, 2, 3)$. Hallar los puntos de dicha recta tales que su distancia al punto $C(2, -1, 1)$ es de tres unidades.

En primer lugar determinamos un vector director $\overrightarrow{v}$ de r; siendo:

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, 2, 3) - (-1, 0, 1) = (2, 2, 2)$, puede ser $\overrightarrow{v} = (1, 1, 1)$. Considerando el punto A(-1, 0, 1), la ecuación de r es:

$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. La expresión en ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = -1 + k \\ y = k \\ z = 1 + k \end{cases}$

Un punto genérico de la recta r es $P(-1+k,\ k,\ 1+k)$.

$$\overline{PC} = 3 \Rightarrow \sqrt{(-1+k-2)^2 + (k+1)^2 + (1+k-1)^2} = 3 \;;;\; (k-3)^2 + (k+1)^2 + k^2 = 9 \;;;$$

$$k^2 - 6k + 9 + k^2 + 2k + 1 + k^2 = 9 \;;;\; 3k^2 - 4k + 1 = 0$$

$$k = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0, 1, 2)}} \\ \underline{k_2 = \frac{1}{3}} \Rightarrow \underline{\underline{P_2\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)}} \end{cases}$$

****

6º) Se considera la función f: $R \to R$ definida por $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ si $x \neq 0$, $f(0)=0$. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la citada función en x = 0.

Para que sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \underline{0} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = \underline{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

<u>La función es continua para x = 0</u>

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0-h}{1+e^{\frac{1}{0-h}}} - \frac{0}{1+e^{\frac{1}{0}}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{1+e^{\frac{1}{-h}}} - \frac{0}{1+e^{\infty}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{1+e^{-\frac{1}{h}}} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{1+e^{-\frac{1}{h}}} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{1+e^{-\infty}} = \frac{-1}{1+0} = \underline{-1 = f'(0^-)}$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0+h}{1+e^{\frac{1}{0+h}}} - \frac{0}{1+e^{\frac{1}{0}}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{1+e^{\frac{1}{h}}} - \frac{0}{1+e^{\infty}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{1+e^{\frac{1}{h}}} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{1+e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = \underline{0 = f'(0^+)}$$

$$\underline{\underline{f'(0^-) \neq f'(0^+) \;\Rightarrow\; f(x) \text{ no es derivable para } x = 0}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN B

1º) Escribir la ecuación implícita del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-8}{4}$ y $s \equiv x = y = z$.

2º) Calcular A · B y B · A siendo $A = (1, \ -3, \ -1, \ 2)$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3º) Hallar los puntos en los que la tangente a la curva $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$ es perpendicular a la recta $y = \frac{x}{3} + 1$.

4º) Siendo $|x|$ el valor absoluto o módulo de x, calcular la siguientes integral definida: $I = \int_{-1}^{2} |x| \cdot dx$.

****

(Resueltos en la Opción A)

5º) Estudiar para que valores de λ y μ los planos $\left.\begin{array}{r} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = \mu \\ x + \lambda y - 6z = -10 \end{array}\right\}$:

a) Tienen un único punto en común.

b) Se cortan en una recta.

----

a)

Los planos tienen un único punto en común cuando el sistema que forman es compatible determinado, es decir: el rango de la matriz de coeficientes es el mismo que el rango de la matriz ampliada, y ambos son 3, igual que el número de incógnitas.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & \lambda & -6 \end{pmatrix} \;;\; M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & \mu \\ 1 & \lambda & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & \lambda & -6 \end{vmatrix} = -24 + 1 + 3\lambda - 6 + 2\lambda - 6 = 5\lambda - 35 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = 7}$$

$\underline{Para\ \ \lambda \neq 7 \Rightarrow Rango\ \ M\ = Rango\ \ M' = 3 = n^{o}\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ \ Determinado}$

$$\underline{\underline{Para\ \ \lambda \neq 7\ \ los\ \ planos\ \ se\ \ cortan\ \ en\ \ un\ \ punto}}$$

b)

Los planos se cortan en una recta cuando los rangos de M y M' son iguales e iguales a 2.

La primera condición es que $\lambda = 7$.

$Para\ \ \lambda = 7\ \ el\ \ rango\ \ de\ \ M'\ \ tiene\ \ que\ \ ser\ 2:$

$$M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & \mu \\ 1 & 7 & -10 \end{vmatrix} = -40 + 7 - \mu - 2 - 10 - 14\mu = 0\ ;;$$

$$-45 - 15\mu = 0\ ;;\ 45 = -15\mu\ ;;\ \underline{\mu = -3}$$

Vamos a comprobar que el rango de M' es 2 en todos los casos posibles:

$$M' \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -6 & -10 \end{vmatrix} = 20 - 6 - 9 + 1 - 36 + 30 = 51 - 51 = 0$$

$$M' \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 7 & -6 & -10 \end{vmatrix} = -10 - 12 - 63 + 7 + 18 + 60 = 85 - 85 = 0$$

$$\underline{\underline{Para\ \ que\ \ los\ \ planos\ \ se\ \ corten\ \ en\ \ una\ \ recta\ \ tienen\ \ que\ \ ser\ \ \lambda = 7\ \ y\ \ \mu = -3}}$$

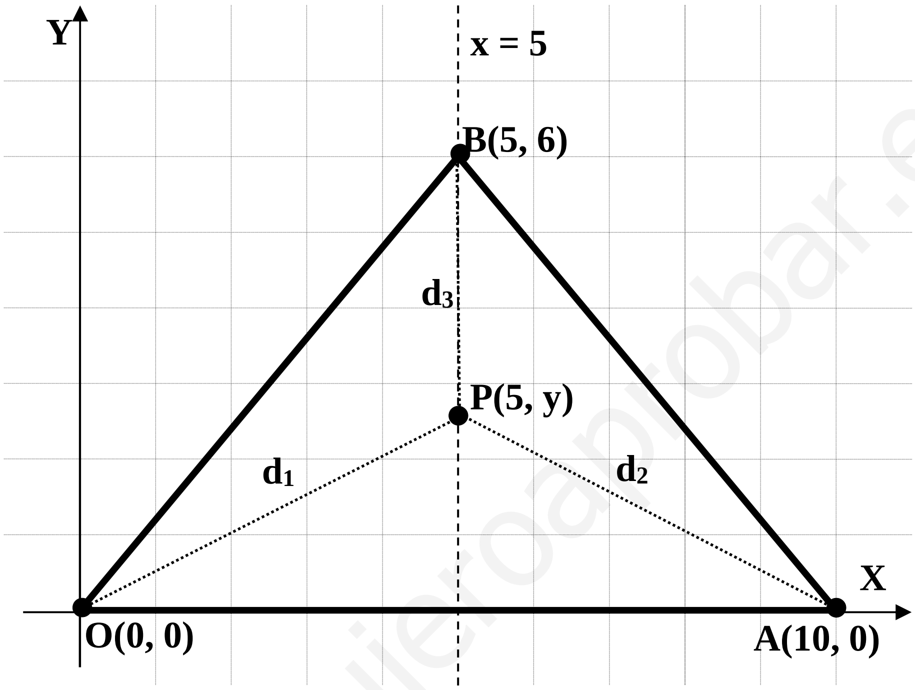
****

www.yoquieroaprobar.es

6º) Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 10 m y la altura relativa a ese lado de 6 m. Encontrar un punto sobre la altura tal que la suma de las distancias de dicho punto a los tres vértices sea mínima.

En primer lugar situamos el triángulo en unos ejes coordenados, situando uno de sus vértices en el origen para facilitar el proceso.

Para una mejor comprensión del ejercicio hacemos una representación gráfica de la situación.



www.yoquieroaprobar.es

$$d_1 = d_{(\overline{OP})} = \sqrt{5^2 + y^2} \quad ;; \quad d_2 = d_{(AP)} = \sqrt{5^2 + (-y)^2} \quad ;; \quad d_3 = d_{(\overline{CP})} = 6 - y$$

$$D = d_1 + d_2 + d_3 = \sqrt{y^2 + 25} + \sqrt{y^2 + 25} - 6 + y = \underline{2\sqrt{y^2 + 25} - y + 6 = D}$$

$$D' = 2 \cdot \frac{2y}{2\sqrt{y^2 + 25}} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2y}{\sqrt{y^2 + 25}} = 1 \;;;\; 2y = \sqrt{y^2 + 25} \;;;\; 4y^2 = y^2 + 25 \;;;\; 3y^2 = 25 \;;;$$

$$y = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; \underline{P\left(5,\ \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)} \qquad \left(\frac{5\sqrt{3}}{3} \cong 2'89\right)$$

El punto se encuentra sobre la altura, aproximadamente, a 2’89 metros de la base.

****