

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE LA RIOJA****JUNIO - 2001**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas.

OPCIÓN A

1º) Utilizando las propiedades de los determinantes, resolver, sin calcular el determinante, la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Restando la primera fila a las otras dos:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por los menores adjuntos de la primera columna:
$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando por los menores adjuntos de la primera columna:

$$(x-1)(x^2-1) = 0 \ ; \ ; \ (x-1)(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x_1 = x_2 = 1}} \\ \underline{\underline{x_3 = -1}} \end{cases}.$$

2º) Calcular los valores de x e y para que el vector $\vec{u} = (x, y, 1)$ sea ortogonal a los vectores $\vec{v} = (3, 2, 0)$ y $\vec{w} = (2, 0, -1)$.

Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es cero.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (x, y, 1) \cdot (3, 2, 0) = \underline{3x + 2y = 0}$$

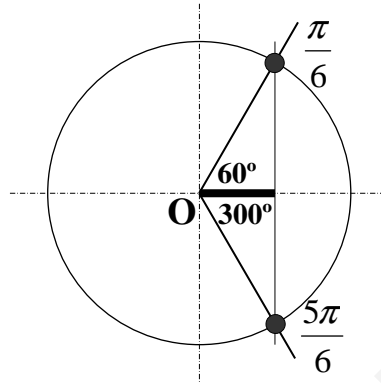
$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow (x, y, 1) \cdot (2, 0, -1) = \underline{2x - 1 = 0} \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{2}}}$$

$$3x + 2y = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} + 2y = 0 \;; \; 3 + 4y = 0 \;; \; \underline{\underline{y = -\frac{3}{4}}}$$

www.yoquieroaprobar.es

3º) Considerar la función $f : [0, 2\pi] \rightarrow R$ definida por $f(x) = x + 5 - 2\text{sen } x$. Hallar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos.

$$f'(x) = 1 - 2\cos x \quad ; \quad f'(x) = 0, x \in [0, 2\pi] \Rightarrow 1 = 2\cos x \quad ; \quad \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$



$$f'(x) > 0 \Rightarrow \cos x < \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right) \Rightarrow \underline{\underline{\text{Creciente}}}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \cos x > \frac{1}{2} \Rightarrow \left(0, \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, 2\pi \right) \Rightarrow \underline{\underline{\text{Decreciente}}}$$

$$f''(x) = 2\text{sen } x \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\text{sen}\frac{\pi}{6} = 2\text{sen } 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + 5 - 2\text{sen } 60^\circ = \frac{\pi}{6} + 5 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi + 30 - 6\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mín}\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi + 30 - 6\sqrt{3}}{6}\right)}}$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\text{sen}\frac{5\pi}{6} = 2\text{sen}(-60^\circ) = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} + 5 + 2\text{sen } 60^\circ = \frac{5\pi}{6} + 5 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\pi + 30 + 6\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máx}\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi + 30 + 6\sqrt{3}}{6}\right)}}$$

4º) Determinar el valor de a para el cual $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{ax} = e$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{ax} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{ax} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{3}} \right)^{ax} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{3}} \right)^{\frac{x}{3} \cdot \frac{3}{x} \cdot ax} =$$

$$= \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{3}} \right)^{\frac{x}{3}} \right]^{\frac{3}{x} \cdot ax} = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{3}} \right)^{\frac{x}{3}} \right]^{3a} = e \Rightarrow 3a = 1 \ ; \ a = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

www.yoquieroaprobar.es

5º) Estudiar, según los valores de m , y resolver cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ x + my + 3z &= 3 \\ y - 6z &= 0 \\ 3y - z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

Como hay tres de las cuatro ecuaciones que no dependen de m , resolvemos el sistema que forman, que es:

$$\left. \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ y - 6z &= 0 \\ 3y - z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo, aplicando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1 - 24 - 6 + 18}{-1 + 18} = \frac{18 - 31}{17} = \underline{\underline{-\frac{13}{17}}} = x$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{17} = \frac{12}{17} = \underline{\underline{\frac{12}{17}}} = y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{17} = \frac{2}{17} = \underline{\underline{\frac{2}{17}}} = z$$

Para que el sistema sea compatible determinado, la segunda ecuación tiene que satisfacerse con los valores obtenidos para las incógnitas, o sea:

$$x + my + 3z = 3 \Rightarrow -\frac{13}{17} + \frac{12m}{17} + \frac{6}{17} = 3 \quad ; \quad -13 + 12m + 6 = 51 \quad ; \quad 12m = 58 \quad ; \quad \underline{\underline{m = \frac{29}{6}}}$$

Conclusión: $m = \frac{29}{6} \Rightarrow$ Compatible Determinado ; $m \neq \frac{29}{6} \Rightarrow$ Incompatible

Otra forma de resolver este problema es la siguiente: como el sistema tiene cuatro ecuaciones y sólo tres incógnitas, para que sea compatible es necesario que el determinante de la matriz ampliada sea cero, o sea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & m & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & m-2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} m-2 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 - F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} m-5 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;; \; 2 \cdot \begin{vmatrix} m-5 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 0 \;; \; -6(m-5)-1=0 \;;$$

$$6m - 30 + 1 = 0 \;; \; 6m = 29 \;; \; m = \underline{\underline{\frac{29}{6}}}$$

Como cabía esperar, se llega a la misma conclusión.

www.yoquieroaprobar.es

6º) Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x \cdot Lx & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función y el eje OX, desde $x = 0$ hasta $x = b$, siendo b la abscisa del mínimo de la función.

El dominio de definición de la función es $D(f) \Rightarrow [0, \infty)$, y es continua en su dominio, por ser una constante o un producto de dos funciones continuas.

Los puntos de corte de la función con el eje X son los siguientes:

$$x \cdot Lx = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \underline{O(0, 0)} \\ x = 1 \rightarrow \underline{A(1, 0)} \end{cases}$$

Vamos a determinar ahora el mínimo de la función, para lo cual consideremos la función $f(x) = x \cdot Lx$.

$$f'(x) = 1 \cdot Lx + x \cdot \frac{1}{x} = Lx + 1 \quad ; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow Lx + 1 = 0 \quad ; \quad Lx = -1 \quad ; \quad \underline{x = e^{-1}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad f''(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}} = e > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo}}$$

$$f(e^{-1}) = e^{-1} \cdot Le^{-1} = \frac{1}{e} \cdot (-1) = -\frac{1}{e} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mín}(e^{-1}, -e^{-1})}} \Rightarrow \underline{\underline{b = e^{-1}}}$$

Como todas las ordenadas de la superficie que vamos a calcular son negativas, cambiamos los límites de integración:

$$A = \int_b^0 x \cdot Lx \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Lx = u \rightarrow \frac{1}{x} \cdot dx = du \\ x dx = dv \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow A = \left[Lx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \right]_{e^{-1}}^0 =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \int x \cdot dx \right]_{e^{-1}}^0 = \left[\frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{e^{-1}}^0 = \left[\frac{x^2}{4} (2Lx - 1) \right]_{e^{-1}}^0 =$$

$$= \left[\frac{0^2}{4} (2L0 - 1) \right] - \left[\frac{e^{-2}}{4} (2Le^{-1} - 1) \right] = I - \left[\frac{1}{4e^2} (-2 - 1) \right] = \underline{\underline{I + \frac{3}{4e^2} = A}} \quad (*)$$

La expresión I es impropia, por lo tanto debemos proceder por límites, como se hace a continuación:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^2}{4} (2Lx - 1) \right] = \frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2Lx - 1}{x^{-2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Indeterminado} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Aplicando L'Hopital} \Rightarrow I = \frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x}}{-2x^{-3}} = -\frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{-2}} = -\frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \underline{\underline{0 = I}}$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido para I, queda finalmente:

$$A = 0 + \frac{3}{4e^2} = \frac{3}{4e^2} \cong \underline{\underline{0'1015 u^2 = A}}$$

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN A

1º) Utilizando las propiedades de los determinantes, resolver, sin calcular el determinante, la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

2º) Calcular los valores de x e y para que el vector $\vec{u} = (x, y, 1)$ sea ortogonal a los vectores $\vec{v} = (3, 2, 0)$ y $\vec{w} = (2, 0, -1)$.

3º) Considerar la función $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 5 - 2\operatorname{sen} x$. Hallar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos.

4º) Determinar el valor de a para el cual $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{ax} = e$.

(Resueltos en la Opción A)

5º) Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(2, -1, 1)$ y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$.

En primer lugar determinamos un plano π que, siendo perpendicular a la recta r , pase por el punto P , para lo cual tendremos en cuenta que el vector director de la recta r es normal al plano π .

$$\text{En paramétricas es: } r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases} \quad \text{Un vector director de } r \text{ es } \vec{v} = (2, 2, 1).$$

El plano π es de la forma: $\pi \equiv 2x + 2y + z + D = 0$. Como tiene que contener al punto $P(2, -1, 1)$, tiene que ser:

$$2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + D = 0 \quad ; ; \quad 4 - 2 + 1 + D = 0 \quad ; ; \quad D = -3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\pi \equiv 2x + 2y + z - 3 = 0}}$$

El punto Q de corte de r con π es:

$$2(2 + 2k) + 2(1 + 2k) + k - 3 = 0 \quad ; ; \quad 4 + 4k + 2 + 4k + k - 3 = 0 \quad ; ; \quad 9k = -3 \quad ; ; \quad \underline{\underline{k = -\frac{1}{3}}} \Rightarrow$$

$$x = 2 + 2k = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad ; ; \quad y = 1 + 2k = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad ; ; \quad z = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Q\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)}}$$

La recta t pedida es la que pasa por P y tiene como vector director a \vec{w} , que es linealmente dependiente al que tiene como origen P y extremo Q :

$$\vec{w}' = \vec{PQ} = Q - P = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) - (2, -1, 1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) \Rightarrow \underline{\underline{\vec{w} = (1, -2, 2)}}$$

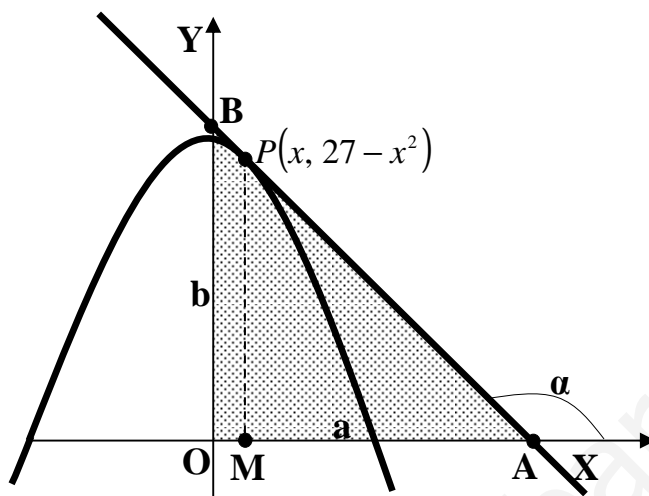
La recta r expresadas por unas ecuaciones continuas es:

$$\underline{\underline{t \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}}}$$

www.yoquieroaprobar.es

6º) Hallar el punto de la parábola $y = 27 - x^2$, situado en el primer cuadrante, tal que el triángulo determinado por la tangente a la parábola en ese punto y los ejes coordenados tenga área mínima? (Obtener el punto y el valor del área).

 En primer lugar vamos a realizar un esquema aproximado de la situación.



Siendo a y b los segmentos que intercepta la tangente a la curva en el punto P , el área pedida es: $S = \frac{a \cdot b}{2}$ (1)

Sabiendo que la derivada en un punto de una función es la tangente o pendiente:

$$\left. \begin{array}{l} y = 27 - x^2 \Rightarrow m = y' = -2x \\ m = \operatorname{tag} \alpha = -\frac{b}{a} \end{array} \right\} \Rightarrow -2x = -\frac{b}{a} \Rightarrow \underline{b = 2ax} \quad (2)$$

Se trata de expresar los valores de a y b en función de x , para lo cual tendremos en cuenta que los triángulos OAB y MAP son semejantes, por lo que se puede establecer la siguiente relación:

$$\frac{b}{a} = \frac{27 - x^2}{a - x} \Rightarrow \frac{2ax}{a} = \frac{27 - x^2}{a - x} \quad ; ; \quad a - x = \frac{27 - x^2}{2x} \quad ; ; \quad a = \frac{27 - x^2}{2x} + x = \underline{\frac{27 + x^2}{2x}} = a$$

Sustituyendo en (2) queda: $b = 2ax = 2 \cdot \frac{27 + x^2}{2x} \cdot x = \underline{27 + x^2} = b$

Sustituyendo, finalmente, en (1) los valores de a y de b :

$$S = \frac{\frac{27 + x^2}{2x} \cdot (27 + x^2)}{2} = \frac{(27 + x^2)^2}{4x} = \underline{\frac{1}{4} \cdot \frac{(27 + x^2)^2}{x}} = S$$

Para que el área sea mínima, su derivada tiene que ser nula:

$$S' = \frac{1}{4} \cdot \frac{[2 \cdot (27 + x^2) \cdot 2x] \cdot x - (27 + x^2)^2 \cdot 1}{x^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(27 + x^2)(4x^2 - 27 - x^2)}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{(27 + x^2)(3x^2 - 27)}{x^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(27 + x^2)(x^2 - 9)}{x^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(27 + x^2)(x+3)(x-3)}{x^2} = S'$$

Los únicos valores que hacen que la derivada sea cero son 3 y -3, pero como el problema decía “en el primer cuadrante”, la solución es $x = 3$.

El punto pedido es P(3, 18)

El valor del área se obtiene sustituyendo el valor de x por 3:

$$S = \frac{1}{4} \cdot \frac{(27 + x^2)^2}{x} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S = \frac{1}{4} \cdot \frac{(27 + 3^2)^2}{3} = \frac{36^2}{12} = \frac{36 \cdot 36}{12} = 36 \cdot 3 = 108$$

El área pedida es de 108 unidades cuadradas.
