PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

SEPTIEMBRE - 2001

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas.

OPCIÓN A

1º) Los puntos A(3, 0) y B(0, 4) son puntos diametralmente opuestos de una circunferencia. Hallar la ecuación de esta.

El centro de la circunferencia O'(a, b) es el punto medio del segmento $\overline{AB}$:

$$\underline{O'\left(\frac{3}{2},\ 2\right)}.$$

El radio de la circunferencia es $r=\overline{AO'}$:

$$r=\overline{AO'}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-3\right)^2+(2-0)^2}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+2^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\underline{\frac{5}{2}=r}$$

Sabiendo que la ecuación de una circunferencia en función del centro y el radio viene dada por la fórmula $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, donde:

$$A=-2a=-2\cdot\frac{3}{2}=\underline{-3=A}\ \ ;;\ \ B=-2b=-2\cdot 2=\underline{-4=B}$$

$$C=a^2+b^2-r^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+4-\frac{25}{4}=4-\frac{16}{4}=4-4=\underline{0=C}$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$\underline{\underline{x^2+y^2-3x-4y=0}}$$

****

2º) Dados los vectores $\overrightarrow{u}=(1,2,0)$ y $\overrightarrow{v}=(0,1,2)$, calcular:

a) El producto vectorial de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

b) Un vector unitario ortogonal a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

c) El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

----

a)

$$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4i+k-2j=4i-2j+k=\underline{(4,\ -2,\ 1)=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}}$$

b)

Sea $\overrightarrow{n}=(a,\ b,\ c)$ un vector ortogonal a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. Tiene que cumplirse que:

$$\left(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right)\cdot\vec{n}=0\ ;;\ (4,\ -2,\ 1)\cdot(a,\ b,\ c)=\underline{4a-2b+c=0}\qquad (*)$$

Cualquier terna de valores a, b, c que cumpla la relación (*) es ortogonal a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$; en particular, si c = 0 y a = 1: 4 · 1 – 2 b + 0 = 0 ;; 4 = 2b ;; b = 2 $\Rightarrow \overrightarrow{n}=(1,\ 2,\ 0)$.

Como el vector pedido tiene que ser unitario:

$\left|\overrightarrow{w}\right|=\sqrt{1^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$. El vector unitario pedido puede ser: $\underline{\underline{\overrightarrow{w}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ 0\right)}}$

c)

El área del paralelogramo que determinan dos vectores es igual al módulo de su producto vectorial:

$$S=\left|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right|=\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}\right\|=\left|4i+k-2j\right|=\left|4i-2j+k\right|=\sqrt{4^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{16+4+1}=\sqrt{21}$$

$$\underline{\underline{S=\sqrt{21}\ \ unidades\ \ cuadradas}}$$

****

3º) Comprobar que es constante la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = arc\ tag \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad con\ \ 0 \le x < \pi .$$

En primer lugar simplificamos la expresión $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$:

$$\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}} = \sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}} = \sqrt{\frac{sen^2\ x}{(1+\cos x)^2}} = \frac{sen\ x}{1+\cos x}$$

$$f(x) = arc\ tag \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = arc\ tag\ \frac{sen\ x}{1+\cos x} = arc\ tag\ u \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'}{1+u^2} \qquad (*)$$

$$u = \frac{sen\ x}{1+\cos x} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{\cos x \cdot (1+\cos x) - sen\ x \cdot (-sen\ x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + \cos^2 x + sen^2\ x}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2} = \underline{\frac{1}{1+\cos x}} = u'$$

Sustituyendo en (*) los valores de u y u’, queda:

$$f'(x) = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{\frac{1}{1+\cos x}}{1+\left(\frac{sen\ x}{1+\cos x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{1+\cos x}}{1+\frac{sen^2\ x}{(1+\cos x)^2}} = \frac{\frac{1}{1+\cos x}}{\frac{(1+\cos x)^2 + sen^2\ x}{(1+\cos x)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{(1+\cos x)^2 + sen^2\ x}{(1+\cos x)}} = \frac{1+\cos x}{1+2\cos x + \cos^2 x + sen^2\ x} = \frac{1+\cos x}{2+2\cos x} = \frac{1+\cos x}{2(1+\cos x)} = \underline{\underline{\frac{1}{2} = f'(x)}}$$

<u>En efecto, la derivada de f(x) es una constante, como teníamos que comprobar.</u>

****

4º) Calcular la integral definida: $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\cdot sen\ x\cdot dx$.

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\cdot sen\ x\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=u\rightarrow du=dx \\ sen\ x\cdot dx=dv\rightarrow v=-\cos\ x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=\left[x\cdot(-\cos\ x)-\int -\cos\ x\cdot dx\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\left[-x\cdot\cos\ x+\int\cos\ x\cdot dx\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\left[-x\cdot\cos\ x+sen\ x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\left[-\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}+sen\frac{\pi}{2}\right]-\left[-\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}+sen\frac{\pi}{4}\right]=-\frac{\pi}{2}\cdot 0+1+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=$$

$$=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}-1\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi-4}{4}\right)=1-\frac{\sqrt{2}(4-\pi)}{8}=\underline{\underline{\frac{8-\sqrt{2}(4-\pi)}{8}}}=I$$

****

5º) Estudiar, según los valores de $x \in R$, el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{pmatrix}$$

Sumando a la segunda columna la primera queda:

$$|A| = \begin{vmatrix} x & x-1 & -1 & 0 \\ -x & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (1-x) \cdot \begin{vmatrix} -x & -1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = (1-x) \cdot \left(-x^3 - 1 - x + x\right) =$$

$$= (x-1)\left(x^3+1\right) = \underline{(x-1)(x+1)\left(x^2+x+1\right) = |A|}$$

Por sen $x^2 + x + 1 \neq 0, \ \forall x \in R$,

<u>El rango de A es 4, excepto para x = 1 y x = -1 en cuyo caso el rango es 3.</u>

****

6º) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x & si \quad x\leq 0 \\ x & si \quad 0<x\leq 3 \\ 3\cos(x-3) & si \quad x>3 \end{cases}$:

a) Estudiar si es derivable en x = 0 y en x = 3.

b) Razonar si se puede asegurar que existe un punto c en el intervalo (-2, 2) en el cual $f'(c)=0$. Encontrar c si existe.

----

a)

Para x = 0:

Para que sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(x^2+x\right) = \underline{0} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = \underline{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)}$$

La función es continua para x = 0. Veamos si es derivable:

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & si \quad x\leq 0 \\ 1 & si \quad 0<x\leq 3 \\ -3\,sen(x-3) & si \quad x>3 \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(0^-) = 2\cdot 0+1 = \underline{1} \\ f'(0^+) = \underline{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f'(0^-) = f'(0^+)}$$

<u>La función es derivable en x = 0.</u>

Para x = 3:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} x = \underline{3} \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left[3\cos(x-3)\right] = \underline{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)}$$

La función es continua para x = 3. Veamos si es derivable:

$$f'(x)=\begin{cases}2x+1 & si \quad x\le 0\\ 1 & si \quad 0<x\le 3\\ -3\,sen\,(x-3) & si \quad x>3\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} f'(3^-)=\underline{1}\\ f'(3^+)=\underline{0}\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \underline{f'(3^-)\neq f'(3^+)}$$

La función no es derivable en x = 3.

b)

Para resolver este ejercicio tenemos que aplicar el Teorema del valor medio o de Lagrange, que dice:

Si f es una función continua en [a, b] y derivable en (a, b), entonces existe al menos un punto $c\in(a,\ b)$ que cumple: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Teniendo en cuenta que f(x) es continua en su dominio, que es R, lo será, lógicamente en el intervalo [-2, 2], y que es derivable en el intervalo (-2, 2), como hemos demostrado en el apartado anterior, cumple las condiciones del Teorema de Lagrange, por lo tanto será:

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{2-\left[(-2)^2+(-2)\right]}{4}=\frac{2-(4-2)}{4}=\frac{2-2}{4}=\frac{0}{4}=0\ \ ;;$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x+1 & si \quad x\le 0\\ 1 & si \quad 0<x\le 3\\ -3\,sen\,(x-3) & si \quad x>3\end{cases} \quad\Rightarrow\quad f'(c)=2c+1=0\ \ ;;\ \ 2c=-1\ ;\ \underline{\underline{c=-\frac{1}{2}}},\ \ \underline{c\in(-2,\ 2)}$$

****

OPCIÓN B

1º) Los puntos A(3, 0) y B(0, 4) son puntos diametralmente opuestos de una circunferencia. Hallar la ecuación de esta.

2º) Dados los vectores $\overrightarrow{u}=(1,\ 2,\ 0)$ y $\overrightarrow{v}=(0,\ 1,\ 2)$, calcular:

a) El producto vectorial de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

b) Un vector unitario ortogonal a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

c) El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

3º) (1 punto) Comprobar que es constante la derivada de la siguiente función:

$$f(x)=arc\ tag\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\quad con\ \ 0\le x<\pi .$$

4º) (1 punto) Calcular la integral definida: $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\cdot sen\ x\cdot dx$.

****

(Resueltos en la Opción A)

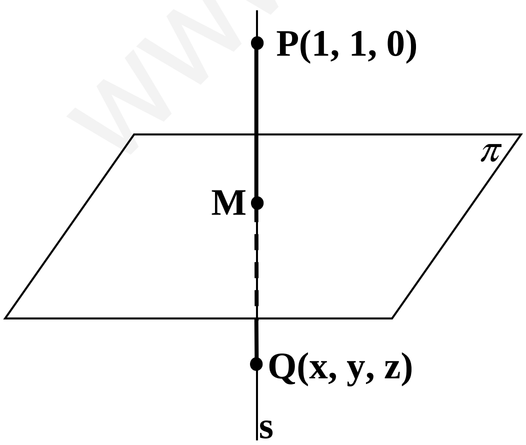
5º) Se considera el punto P(1, 1, 0).

a) Calcular el punto Q simétrico de P con respecto al plano $\pi\equiv x+y+z=0$.

b) Calcular el punto R simétrico de P con respecto a la recta $r\equiv\begin{cases}x-2y=1\\x-y-z=0\end{cases}$.

----

a)



Un vector normal al plano π es:

$$\overrightarrow{n}=(1,\ 1,\ 1)$$

La recta s es la que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π, por lo tanto su vector director pude ser el normal del plano, y entonces:

$$s\equiv\begin{cases}x=1+k\\y=1+k\\z=k\end{cases}$$

El punto M, intersección del plano π con la recta s, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

$$\pi \equiv x+y+z=0 \;\Rightarrow\; (1+k)+(1+k)+k=0 \;;;\; 2+3k=0 \;;;\; 3k=-2 \;;;\; \underline{k=-\frac{2}{3}}$$

$$s \equiv \begin{cases} x=1+k \\ y=1+k \\ z=k \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{Bmatrix} x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \\ y=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \\ z=-\frac{2}{3} \end{Bmatrix} \;\Rightarrow\; \underline{M\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)}$$

Para que Q sea el punto simétrico de P con respecto a π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MQ} \;\Rightarrow\; M-P=Q-M \;;;\; \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)-(1,\ 1,\ 0)=(x,\ y,\ z)-\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right) \;;;$$

$$\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)=\left(x-\frac{1}{3},\ y-\frac{1}{3},\ z+\frac{2}{3}\right) \;\Rightarrow\; \begin{Bmatrix} x-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3} & \rightarrow \underline{x=-\frac{1}{3}} \\ y-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3} & \rightarrow \underline{y=-\frac{1}{3}} \\ z+\frac{2}{3}=-\frac{2}{3} & \rightarrow \underline{z=-\frac{4}{3}} \end{Bmatrix} \;\Rightarrow$$

$$\underline{\underline{Q\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{4}{3}\right)}}$$

b)

La expresión por ecuaciones paramétricas de la recta r es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x-2y=1 \\ x-y-z=0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \underline{z=k} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x-2y=1 \\ -x+y=-k \end{cases} \;\Rightarrow\; -y=1-k \;;;\; \underline{y=-1+k} \;;;$$

$$x-2y=1 \;;;\; x=1+2y=1-2+2k=\underline{-1+k=x} \;\Rightarrow\; \underline{r \equiv \begin{cases} x=-1+2k \\ y=-1+k \\ z=k \end{cases}} \;\Rightarrow\; \underline{\vec{v}=(2,\ 1,\ 1)}$$

El plano π', perpendicular a r por P, es el que tiene como vector normal a $\vec{v}$ y contiene al punto P:

$$\left.\begin{array}{l} \pi' \equiv 2x + y + z + D = 0 \\ \\ P(1,\ 1,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 + 1 + 0 + D = 0 \ ;; \ \underline{D = -3} \ \ \Rightarrow \ \ \underline{\pi' \equiv 2x + y + z - 3 = 0}$$

El punto N de intersección de la recta r con el plano π' es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi' \equiv 2x + y + z - 3 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = -1 + k \\ z = k \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(-1 + 2k) + (-1 + k) + k - 3 = 0 \ ;; \ -2 + 4k - 1 + k + k - 3 = 0 \ ;;$$

$$6k = 6 \ ;; \ \underline{k = 1} \ \ \Rightarrow \ \ \underline{N(1,\ 0,\ 1)}$$

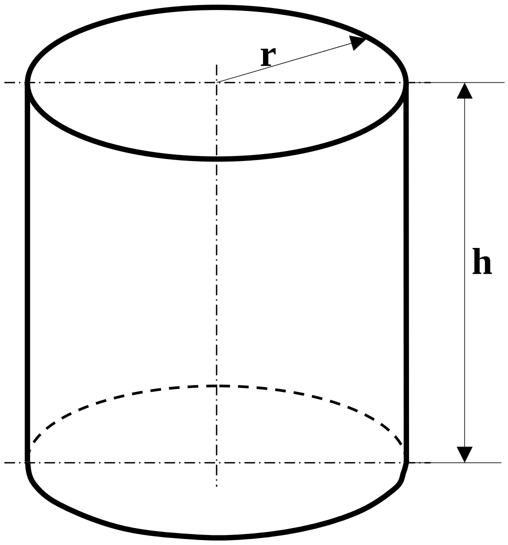
Para que N sea el punto simétrico de P con respecto a r, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NR} \ \Rightarrow \ N - P = R - N \ ;; \ (1,\ 0,\ 1) - (1,\ 1,\ 0) = (x,\ y,\ z) - (1,\ 0,\ 1) \ ;;$$

$$(0,\ -1,\ 1) = (x - 1,\ \ y,\ \ z - 1) \ \ \Rightarrow \ \ \left.\begin{cases} x - 1 = 0 \ \ \rightarrow \ \underline{x = 1} \\ \underline{y = -1} \\ z - 1 = 1 \ \ \rightarrow \ \underline{z = 2} \end{cases}\right\} \ \Rightarrow \ \ \underline{\underline{R(1,\ -1,\ 2)}}$$

****

6º) Se desea fabricar una lata de conservas en forma de cilindro recto con ambas tapas, de área total 150 cm^2. Calcular el radio y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.



$$V = \pi r^2 h \;\;\Rightarrow\;\; Máximo \quad (*)$$

$$S_T = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r (r+h) = 150 \;;;$$

$$r + h = \frac{150}{2\pi r} = \frac{75}{\pi r} \;;;\; h = \frac{75}{\pi r} - r = \underline{\frac{75 - \pi r^2}{\pi r} = h}$$

Sustituyendo en (*) el valor de h, queda:

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{75 - \pi r^2}{\pi r} = r\left(75 - \pi r^2\right) =$$

$$= \underline{75r - \pi r^3 = V}$$

Derivando con respecto a la variable r:

$$V' = 75 - 3\pi r^2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; 25 - \pi r^2 = 0 \;;;\; 25 = \pi r^2 \;;;\; r = \sqrt{\frac{25}{\pi}} = \underline{\underline{\frac{5}{\sqrt{\pi}}\, cm = r}}$$

$$h = \frac{75 - \pi r^2}{\pi r} = \frac{75 - \pi \cdot \frac{25}{\pi}}{\pi \cdot \frac{5}{\sqrt{\pi}}} = \frac{75 - 25}{5\sqrt{\pi}} = \underline{\underline{\frac{10}{\sqrt{\pi}}\, cm = h = 2r}}$$

Justificación de que se trata de un máximo:

$$V' = 75 - 3\pi r^2 \;;;\; V'' = -6\pi r \;;;\; V''\left(\tfrac{5}{\sqrt{\pi}}\right) = -6\pi \cdot \frac{5}{\sqrt{\pi}} < 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Máximo,\; c.\; q.\; j.}}$$

****