PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO - 2002

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

No se permite el uso de calculadoras gráficas.

PROPUESTA A

1º) Siendo $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, resolver la ecuación: $A \cdot X - B + C = O$.

$A \cdot X - B + C = O$;; $A \cdot X = B - C$. Multiplicando por la izquierda por A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B - C) \;;;\; I \cdot X = A^{-1} \cdot (B - C) \;;;\; \underline{X = A^{-1} \cdot (B - C)} \qquad (*)$$

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \;;;\; |A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = \underline{1} \;;;\; A^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;;;\; Adj.\ de\ A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \;;;$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = Adj.\ de\ A^t = \underline{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = A^{-1}}$$

$$B - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = B - C}$$

Sustituyendo en (*) los valores de A^{-1} y de (B – C), queda:

$$X = A^{-1} \cdot (B - C) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3 & 0+1 & 0-4 & 0 \\ 1-12 & 3-4 & -2+16 & -2+0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}}}$$

****

2º) Calcula el valor de a para que la recta $r \equiv \begin{cases} 5x - y + z = 0 \\ x - y - z = -4 \end{cases}$ sea paralela al plano de ecuación $\pi \equiv ax - 6y + 4z = 5$.

Si la recta r es paralela al plano π no tienen ningún punto en común; es decir: el sistema formando por ambos tiene que ser incompatible.

Según el Teorema de Rouché-Fröbenius, para que un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas sea incompatible es necesario que las matrices de coeficientes y ampliada no tengan el mismo rango.

El sistema formado por la recta y el plano es: $\begin{cases} 5x - y + z = 0 \\ x - y - z = -4 \\ ax - 6y + 4z = 5 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ a & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ a & -6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ a & -6 & 4 \end{vmatrix} = -20 - 6 + a + a - 30 + 4 = 2a - 52 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{a = 26}$$

Veamos el rango de M’ para el valor de a:

$$\{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \\ -6 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 24 - 16 + 5 = 34 - 16 = 18 \neq 0$$

$$\underline{Para\ \ a = 26 \;\Rightarrow\; Rango\ \ M = 2\ \ ;;\ \ Rango\ \ M' = 3 \;\Rightarrow\; Incompatible}$$

$$\underline{\underline{La\ \ recta\ \ r\ \ y\ \ el\ \ plano\ \ \pi\ \ son\ \ paralelos\ \ cuando\ \ a = 26}}$$

****

3º) Calcula un punto del intervalo [1, 3] en el que la recta t, tangente a la curva de ecuación $y = x^2 - x + 2$ es paralela a la cuerda que une los puntos A(1, 2) y B(3, 8).

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,\ 8) - (1,\ 2) = (2,\ 6)$, cuya pendiente es $m = \frac{6}{2} = \underline{3 = m}$.

La pendiente a una curva en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$y' = 2x - 1 \ \Rightarrow\ y' = m = 3 \ \Rightarrow\ 2x - 1 = 3 \ ;;\ 2x = 4 \ ;;\ \underline{x = 2 \in [1,\ 3]}$$

El punto de tangencia para x = 2 es: $y(2) = 2^2 - 2 + 2 = 4 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{P(2,\ 4)}}$.

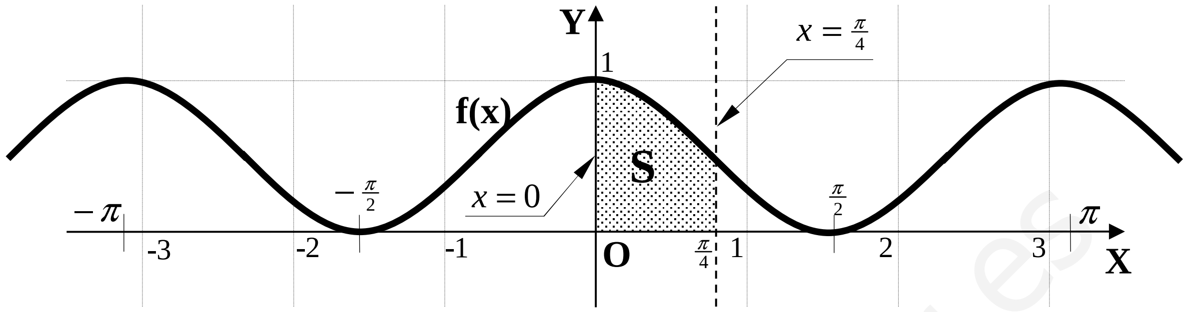
Sabiendo que la ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$, en el caso que nos ocupa es:

$$y - 4 = 2(x - 2) \ ;;\ y - 4 = 2x - 4 \ \Rightarrow\ \underline{\text{Recta tangente}:\ t \equiv 2x - y = 0}$$

****

4º) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de $y = \cos^2 x$, el eje OX y las rectas x = 0 y $x = \frac{\pi}{4}$.

La representación gráfica, aproximada, de la figura es la que indica la figura.



De la observación de la figura se deduce que el área pedida es la siguiente:

$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cdot dx$. Para la resolución de la integral indefinida $I = \int \cos^2 x \cdot dx$ tenemos en cuenta lo siguiente:

$$I = \int \cos^2 x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} sen^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \cos^2 x - sen^2 x = \cos 2x \\ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \cdot dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \int \cos 2x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = t \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \cos t \cdot dt = \frac{x}{2} + \frac{sen\ t}{4} + C = \underline{\frac{x}{2} + \frac{sen\ 2x}{4} + C}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, el área pedida es:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cdot dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{sen\ (2x)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2} + \frac{sen\ \frac{\pi}{2}}{4} \right) - \left(0 + \frac{sen\ 0}{4} \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi + 2}{8}\ u^2 = S}}$$

****

5º) Representa gráficamente la curva $y = x + \frac{1}{x}$. Para ello calcula las asíntotas, puntos críticos e intervalos de crecimiento.

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más infinito y a menos infinito.

$$y = k \Rightarrow \begin{cases} \underset{x \to +\infty}{lím} f(x) = \underset{x \to +\infty}{lím} \frac{x^2+1}{x} = +\infty \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{No \;\; tiene}} \\ \underset{x \to -\infty}{lím} f(x) = \underset{x \to -\infty}{lím} \frac{x^2+1}{x} = -\infty \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{No \;\; tiene}} \end{cases}$$

Verticales: son los valores finitos de x que anulan el denominador.

$$\underline{\underline{x = 0 \;\; \Rightarrow \;\; Eje \;\; Y}}$$

Oblicuas: Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador, que es lo que ocurre en nuestro caso.

Son de la forma $y = mx + n \quad (m \neq 0 \;\; ; \;\; m \neq \infty)$.

$$m = \underset{x \to +\infty}{ím} \frac{f(x)}{x} = \underset{x \to +\infty}{lím} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \underset{x \to +\infty}{lím} \frac{x^2+1}{x^2} = \underline{1 = m}$$

$$n = \underset{x \to +\infty}{lím} [f(x) - m\,x] = \underset{x \to +\infty}{lím} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right) = \underset{x \to +\infty}{lím} \frac{x^1 + 1 - x^2}{x} = \underset{x \to +\infty}{lím} \frac{1}{x} = \underline{0 = n}$$

<u>Es asíntota oblicua la recta y = x.</u>

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - 1 \cdot (x^2+1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - 2x \cdot (x^2-1)}{x^4} = \frac{2x^2 - 2(x^2-1)}{x^3} = \frac{2x^2 - 2x^2 + 2}{x^2} = \frac{2}{x^2}$$

Por tratarse de una función impar $\{f(x) = -f(-x)\}$ es simétrica con respecto al origen de coordenadas. El dominio de f es $R-\{0\}$.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2}=0 \;;;\; x^2-1=0 \;;;\; x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-1 \end{cases}$$

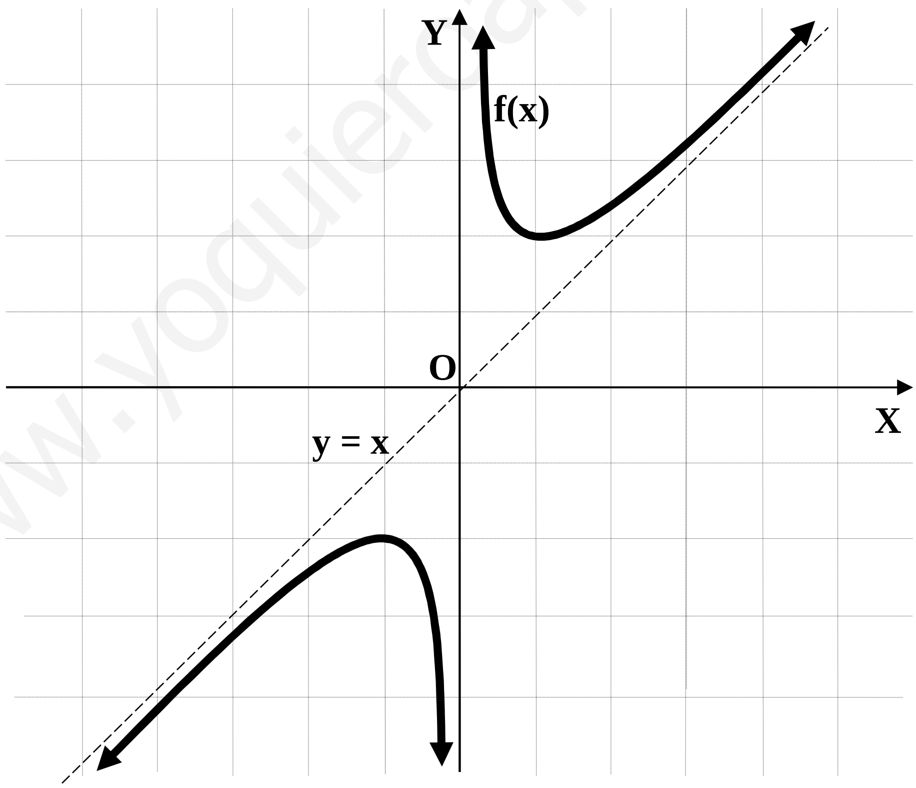
$$f'(x)>0 \Rightarrow |x|>0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{Creciente:\ (-\infty,\ 0)\cup(1,\ +\infty)}} \\ \\ \underline{\underline{Decreciente:\ (-1,\ 0)\cup(0,\ 1)}} \end{cases}$$

$$f''(1)=\frac{2}{1^2}=2>0 \Rightarrow Mínimo\ \ para\ \ x=1 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo(1,\ 2)}}$$

Por simetría : $\underline{\underline{Máximo(-1,\ -2)}}$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{2}{x^2}=0 \Rightarrow 2\neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{No\ \ tiene\ \ puntos\ \ de\ \ \inf lexión.}}$$

La representación gráfica de la figura es, aproximadamente, la siguiente:



****

6º) Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos A(-1, 1, 0) y B(3, 2, -4). Comprueba que obtienes un plano perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$ que pasa por el punto medio del segmento AB.

Si el punto P(x, y, z) pertenece al lugar geométrico que queremos determinar, tiene que cumplirse que $\overline{AP} = \overline{BP}$.

$$\overline{AP} = \left|\overrightarrow{AP}\right| = |(x,\ y,\ x) - (-1,\ 1,\ 0)| = |(x+1,\ y-1,\ z)| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2} = \underline{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2} = \overline{AP}}$$

$$\overline{AP} = \left|\overrightarrow{BP}\right| = |(x,\ y,\ x) - (3,\ 2,\ -4)| = |(x-3,\ y-2,\ z+4)| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 8z + 16} = \underline{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 8z + 29} = \overline{BP}}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 8z + 29} \ ;;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2 = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 8z + 29 \ ;;$$

$$2x - 2y + 2 = -6x - 4y + 8z + 29 \ ;; \ \underline{\underline{\pi \equiv 8x + 2y - 8z - 27 = 0}}$$

Como se comprueba, el lugar geométrico pedido es, en efecto, un plano π, cuyo vector normal es $\overrightarrow{n} = (8,\ 2,\ -8)$.

Para demostrar que el plano π es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$ se tiene que demostrar que los vectores $\overrightarrow{n} = (8,\ 2,\ -8)$ y $\overrightarrow{AB}$ son linealmente dependientes (paralelos).

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3,\ 2,\ -4) - (-1,\ 1,\ 0) = (4,\ 1,\ -4).$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{n} = (8,\ 2,\ -8) \\ \overrightarrow{AB} = (4,\ 1,\ -4) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{2}{1} = \frac{-8}{-4} \Rightarrow \underline{\underline{\overrightarrow{n}\ \ y\ \ \overrightarrow{AB}\ \ son\ \ perpendiculares,\ \ c.q.d.}}$$

El punto medio del segmento AB es: $\left\{\begin{array}{l} x_m = \frac{3+(-1)}{2} = 1 \\ y_m = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \\ z_m = \frac{-4+0}{2} = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{M\left(1,\ \frac{3}{2},\ -2\right)}.$

Vamos a comprobar que el punto M pertenece al plano π, para lo cual debe de satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 8x+2y-8z-27=0 \\ \\ M\left(1,\ \frac{3}{2},\ -2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 8\cdot 1+2\cdot\frac{3}{2}-8\cdot(-2)-27=0\ ;;\ 8+3+16-27=0\ ;;$$

$$27-27=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{M\in\pi,\ c.q.d.}}$$

****

PROPUESTA B

1º) Siendo $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ -2 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -3 & 0\end{pmatrix}$, resolver la ecuación: $A\cdot X-B+C=O$.

2º) Calcula el valor de a para que la recta $r\equiv\begin{cases}5x-y+z=0\\ x-y-z=-4\end{cases}$ sea paralela al plano de ecuación $\pi\equiv ax-6y+4z=5$.

3º) Calcula un punto del intervalo [1, 3] en el que la recta t, tangente a la curva de ecuación $y=x^2-x+2$ es paralela a la cuerda que une los puntos A(1, 2) y B(3, 8).

4º) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de $y=\cos^2 x$, el eje OX y las rectas x = 0 y $x=\frac{\pi}{4}$.

(Resueltos en la propuesta A)

****

5º) Estudia y resuelve, según los valores de λ, el sistema $\begin{cases}x+y+z=2\\ 2x-y=\lambda\\ y+3z=\lambda\\ x-y+2z=0\end{cases}$. Si las dos primeras ecuaciones representan una recta r y las dos últimas otra recta s, interpreta geométricamente los resultados obtenidos.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 0 & \lambda\\ 0 & 1 & 3 & \lambda\\ 1 & -1 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$\{F_1,\ F_2,\ F_3\}\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=-3+2-6=2-9=-7\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M=3}$$

El rango de la matriz ampliada en función de λ es el siguiente:

$$|M'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 3 & \lambda \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} F_2 \to F_2 + F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \\ F_4 \to F_4 + F_1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & \lambda+2 \\ -1 & 0 & 2 & \lambda-2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & \lambda+2 \\ -1 & 2 & \lambda-2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -[12 - 3(\lambda+2) + 2(\lambda-2) - 4(\lambda+2) - 9(\lambda-2) + 2] = -[14 - 7(\lambda+2) - 7(\lambda-2)] =$$

$$= -(14 - 7\lambda - 14 - 7\lambda + 14) = -(-14\lambda + 14) = 14\lambda - 14 = 14(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = 1}$$

$$\underline{\underline{Para \ \ \lambda \neq 1 \Rightarrow Rango \ \ M = 3 \ ;; \ Rango \ \ M' = 4 \Rightarrow Incompatible}}$$

$$\underline{\underline{Para \ \ \lambda = 1 \Rightarrow Rango \ \ M = Rango \ \ M' = 3 = n^o \ \ incóg. \Rightarrow Compatible \ \ Deter\min ado}}$$

Para $\lambda = 1$ resulta el sistema $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y = 1 \\ y + 3z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$. Para resolverlo despreciamos, por ejemplo, las última ecuación y resolvemos el sistema resultante aplicando la Regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-6+1+1-3}{-7} = \frac{-7}{-7} = \underline{\underline{1 = x}} \ ;; \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{3+2-12}{-7} = \frac{-7}{-7} = \underline{\underline{1 = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-1+4-1-2}{-7} = \frac{0}{-7} = \underline{\underline{0 = z}}$$

La interpretación geométrica en el caso de que las dos primeras ecuaciones determinen una recta r y las dos últimas otra recta s es la siguiente: por cortarse los cuatro planos en el punto P(1, 1, 0), (solución del sistema), las rectas r y s son secantes y se cortan, precisamente, en el punto P.

****

6º) Obtén la función f(x) cuya derivada es la función $g(x)=(x-1)e^x$ y de manera que tiene un extremo relativo en un punto del eje de abscisas. Razona si dicho punto es máximo o mínimo.

Siendo f'(x) = g(x), tiene que cumplirse que $f(x)=\int (x-1)e^x \cdot dx$.

Resolviendo la integral anterior por el método de integración "por partes", cuya fórmula es $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$.

$$f(x)=\int (x-1)e^x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = x-1 \rightarrow du = dx \\ \\ e^x \cdot dx = dv \rightarrow v = e^x \end{array} \right\} \Rightarrow f(x)=(x-1)\cdot e^x - \int e^x \cdot dx =$$

$$= (x-1)e^x - e^x + K = \underline{e^x(x-2)+K = f(x)}$$

Sabiendo que tiene un extremo relativo en el eje OX, la derivada tiene que anularse en ese punto:

$$f'(x)=g(x)=(x-1)e^x=0 \Rightarrow x-1=0 \;;;\; x=1 \Rightarrow \underline{Extremo\ \ relativo :: \ P(1,\ 0)}$$

Como el punto P(1, 0) pertenece a la función f(x), tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} f(x)=e^x(x-2)+K \\ \\ P(1,\ 0) \end{array} \right\} \Rightarrow e^1 \cdot (1-2)+K=0 \;;;\; e\cdot(-1)+K=0 \;;;\; -e+K=0 \;;;\; \underline{K=e}$$

La función pedida es $\underline{\underline{f(x)=e^x(x-2)+e}}$

Para determinar si el punto crítico P(1, 0) es un máximo o un mínimo relativo recurrimos a la segunda derivada:

$$f'(x)=g(x)=(x-1)e^x \;;;\; f''(x)=1\cdot e^x+(x-1)\cdot e^x = \underline{x\cdot e^x = f''(x)}$$

$$f''(1)=1\cdot e^1 = e > 0 \Rightarrow \underline{\underline{El\ \ punto\ \ P(1,\ 0)\ \ es\ \ un\ \ Mínimo\ \ relativo}}$$

****