PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

SEPTIEMBRE-2002

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

No se permite el uso de calculadoras gráficas.

PROPUESTA A

1º) Probar que las ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 3x + 5z = 9 \end{cases}$ y las ecuaciones $s \equiv \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$ representan a la misma recta.

Una forma de resolver el ejercicio es expresando la primera de las ecuaciones mediante otras ecuaciones continuas lo más simplificadas posible:

Las ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 3x + 5z - 9 = 0 \end{cases}$ son equivalentes a $r \equiv \begin{cases} x = \frac{11}{2} + \frac{5}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\lambda \end{cases}$.

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = \left(\frac{5}{2},\ 1,\ -\frac{3}{2}\right)$ y un vector director de la *recta* s es $\overrightarrow{v_s} = (5,\ 2,\ -3)$.

Siendo $\overrightarrow{v_s} = 2 \cdot \overrightarrow{v_r}$, (linealmente dependientes, o sea: paralelos), las rectas son, de momento, paralelas. Para demostrar que son coincidentes, un punto de una de las rectas tiene que satisfacer las ecuaciones de la otra.

Un punto de s es P(3, -1, 0). Vamos a comprobar si pertenece a la recta r:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 3x + 5z = 9 \end{cases} \\ P(3,\ -1,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 3-(-1)+0=4 \\ \\ 3\cdot 3+5\cdot 0=9 \end{cases} \;;\; \begin{cases} 3+1=4 \to Si \\ \\ 9+0=9 \to Si \end{cases} \Rightarrow \underline{P \in s,\ \ c.q.d.}$$

<u>En efecto, las expresiones dadas representan a la misma recta.</u>

****

2º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, calcula la matriz $B=\left(A^t \cdot A^{-1}\right)^2$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=\underline{1} \;;;\; \underline{A^t=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}} \;;;\; Adj.\ A^t=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}}$$

$$A^t \cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-1 & -4-4\\ 0+0 & -1+0\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}-1 & -8\\ 0 & -1\end{pmatrix}=A^t \cdot A^{-1}}$$

$$B=\left(A^t \cdot A^{-1}\right)^2=\begin{pmatrix}-1 & -8\\ 0 & -1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-1 & -8\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -8\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-0 & 8+8\\ 0-0 & 0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 16\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{B=\begin{pmatrix}1 & 16\\ 0 & 1\end{pmatrix}}}$$

****

3º) Calcula a integral indefinida $I=\int \frac{sen\ x}{(\cos\ x)^4}\cdot dx$.

$$I=\int \frac{sen\ x}{(\cos\ x)^4}\cdot dx \ \Rightarrow \ \left\{\begin{array}{l}\cos x=t \\ -sen\ x\cdot dx=dt \\ sen\ x\cdot dx=-dt\end{array}\right\} \ \Rightarrow \ I=-\int \frac{1}{t^4}\cdot dt=-\int t^{-4}\cdot dt=-\frac{t^{-3}}{-3}+C=$$

$$=\frac{1}{3t^3}+C=\underline{\underline{\frac{1}{3\cos^3 x}+C=I}}$$

****

4º) Un número más el cuadrado de otro suman 48, ¿cómo deben elegirse estos números para que su producto sea máximo?

Sean los números pedidos x e y.

Por condición del problema es: $P = x + y^2 = 48$;; $\underline{x = 48 - y^2}$

$$P = x \cdot y \Rightarrow \textit{Máximo} \;\;;;\;\; P(y) = \left(48 - y^2\right) \cdot y = 48y - y^3$$

$$P'(y) = 48 - 3y^2 = 0 \;\;;;\;\; 48 - 3y^2 = 0 \;\;;;\;\; 16 - y^2 = 0 \;\;;;\;\; y^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} \underline{y_1 = 4} \\ \underline{y_2 = -4} \end{cases}$$

$$P''(y) = -6y \Rightarrow \begin{cases} P''(4) = -6 \cdot 4 = -24 < 0 \Rightarrow \underline{\textit{Máximo para } y = 4} \\ \\ P''(-4) = -6 \cdot (-4) = 24 > 0 \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo para } y = -4} \end{cases}$$

<u>Los números que cumplen la condición son 32 y 4.</u>

****

5º) En la hipérbola de ecuación $x \cdot y = 2$ se consideran los puntos A(1, 2) y B(2, 1).

a) Calcula las rectas tangentes a la hipérbola en cada uno de esos puntos y halla el punto en el que se cortan.

b) Calcula el área de la región del plano limitada por las rectas tangentes anteriores y el correspondiente arco de hipérbola.

----

a)

Sabiendo que la pendiente a una curva en un punto es la derivada de la curva en ese punto, y que la ecuación de una recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$, las ecuaciones de las rectas tangentes son las siguientes:

$$y = \frac{2}{x} \;;;\; y' = -\frac{2}{x^2} \;\Rightarrow \begin{cases} A(1,\ 2) \;\rightarrow\; m_1 = y'(1) = -\frac{2}{1^2} = -\frac{2}{1} = \underline{-2 = m_1} \\ B(2,\ 1) \;\rightarrow\; m_2 = y'(2) = -\frac{2}{2^2} = -\frac{2}{4} = \underline{-\frac{1}{2} = m_2} \end{cases}$$

$$t_1 \;\Rightarrow\; y - 2 = -2 \cdot (x - 1) \;;;\; y - 2 = -2x + 2 \;;;\; \underline{\underline{t_1 \equiv y = -2x + 4}}$$

$$t_2 \;\Rightarrow\; y - 1 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 2) \;;;\; y - 1 = -\frac{1}{2}x + 1 \;;;\; 2y - 2 = -x + 2 \;;;\; \underline{\underline{t_2 \equiv y = -\frac{1}{2}x + 2}}$$

El punto P de corte de las tangentes es la solución del sistema que forman:

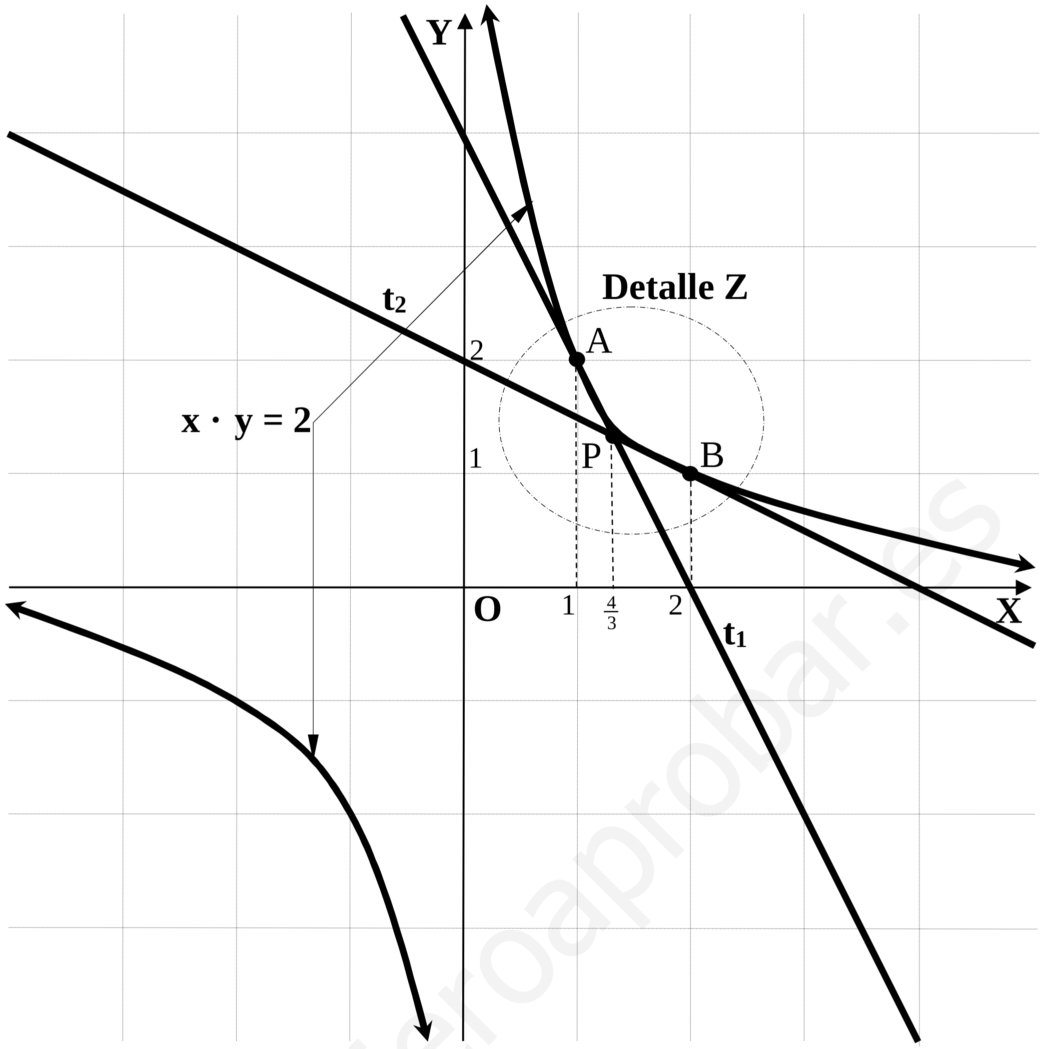
$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - 4 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -2x - y + 4 = 0 \\ 2x + 4y - 8 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\; 3y - 4 = 0 \;;;\; \underline{y = \frac{4}{3}}$$

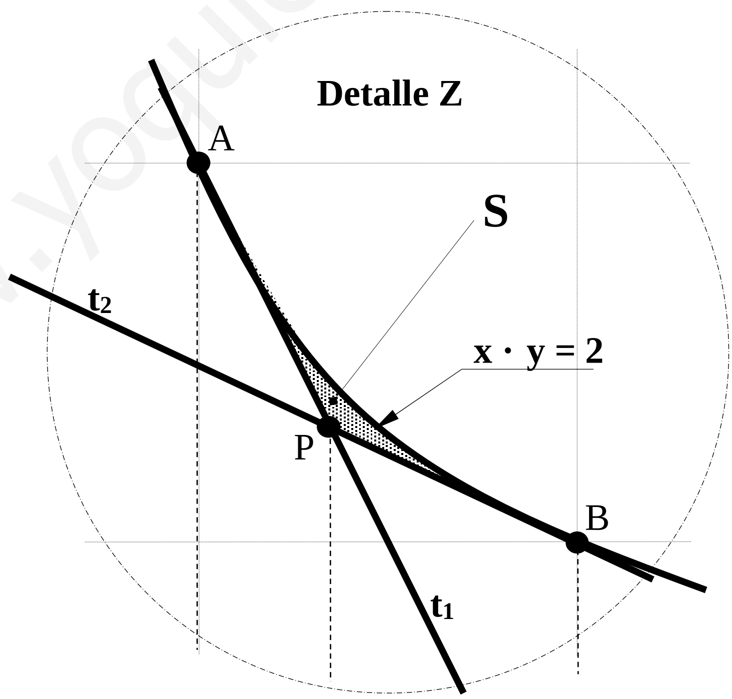
$$x + 2y - 4 = 0 \;;;\; x + \frac{8}{3} - 4 = 0 \;;;\; x = 4 - \frac{8}{3} = \underline{\frac{4}{3} = x} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{P\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)}}$$

b)

La representación gráfica de la situación es la representada en la figura de la cual se destaca el detalle Z.

De la observación del detalle se deduce que la superficie que se pide es la siguiente:





$$S=\int_{1}^{2}\frac{2}{x}\cdot dx-\int_{1}^{\frac{4}{3}}(-2x+4)dx-\int_{\frac{4}{3}}^{2}\left(-\frac{1}{2}x+2\right)dx=2\cdot\left[L\,x\right]_{1}^{2}-\left[-x^{2}+4x\right]_{1}^{\frac{4}{3}}-\left[-\frac{x^{2}}{4}+2x\right]_{\frac{4}{3}}^{2}=$$

$$= 2 \cdot (L2 - L1) - \left\{ \left[-\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{4}{3} \right] - \left(-1^2 + 4 \cdot 1\right) \right\} - \left\{ \left(-\frac{2^2}{4} + 2 \cdot 2 \right) - \left[-\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{4} + 2 \cdot \frac{4}{3} \right] \right\} =$$

$$= 2 \cdot (L2 - 0) - \left[\left(-\frac{16}{9} + \frac{16}{3} \right) - (-1 + 4) \right] - \left[(-1 + 4) - \left(-\frac{16}{36} + \frac{8}{3} \right) \right] =$$

$$= 2L2 + \frac{16}{9} - \frac{16}{3} + 3 - 3 - \frac{4}{9} + \frac{8}{3} = 2L2 + \frac{12}{9} - \frac{8}{3} = 2L2 + \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = 2L2 - \frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{6L2 - 4}{3}\ u^2}} =$$

$$= \frac{L64 - 4}{3} \cong \underline{\underline{0'053\ u^2 = S}}$$

****

6º) Discute, según los valores de a, la posición relativa de los siguientes planos indicando las figuras que determinan: $\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x+3y-4z=1 \\ \pi_2 \equiv 4x+6y-az=2 \\ \pi_3 \equiv x+y+az=10 \end{cases}$

Las matrices de coeficientes y ampliada que determinan los tres planos son:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 4 & 6 & -a & 2 \\ 1 & 1 & a & 10 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=12a-16-3a+24+2a-12a=8-a=0 \Rightarrow \underline{a=8}$$

$$\underline{Para\ \neq 8\ \ Rango\ \ M = Rango\ \ M'=3=n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Determinado}$$

Veamos el rango de M’ para el valor que anula el determinante de M:

Para a = 8 el sistema resulta $\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x+3y-4z=1 \\ \pi_2 \equiv 4x+6y-8z=2 \\ \pi_3 \equiv x+y+8z=10 \end{cases}$, donde se comprueba que los planos π_1 y π_2 son coincidentes y secantes a π_3 por determinar su intersección la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+3y-4z=1 \\ x+y+8z=10 \end{cases}$.

<u>Conclusión:</u>

$$\underline{\underline{Para\ \ a\neq 8\ \ los\ \ planos\ \ \pi_1,\ \pi_2\ \ y\ \ \pi_3\ \ se\ \ cortan\ \ en\ \ un\ \ punto.}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=8\ \ los\ \ planos\ \ \pi_1,\ \pi_2\ \ son\ \ coincidentes\ \ y\ \ secante\ \ a\ \ \pi_3.}}$$

****

PROPUESTA B

1º) Probar que las ecuaciones $\begin{cases}5x-y+z=0\\x-y-z=-4\end{cases}$ y las ecuaciones $\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-3}$ representan a la misma recta.

2º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$, calcula la matriz $B=\left(A^t\cdot A^{-1}\right)^2$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

3º) Calcula a integral indefinida $I=\int\frac{sen\ x}{(\cos\ x)^4}\cdot dx$.

4º) Un número más el cuadrado de otro suman 48, ¿cómo deben elegirse estos números para que su producto sea máximo?

(Resueltos en la propuesta A)

****

5º) a) Halla la ecuación del plano π perpendicular a la recta $r\equiv\begin{cases}x+y+z-3=0\\x-y+2z+1=0\end{cases}$ que pasa por el punto A(5, 0, 10).

b) Halla la distancia de dicho plano al punto B(2, 1, 0).

----

a)

Si el plano π es perpendicular a la recta r, el vector normal del plano es linealmente dependiente (paralelo) al vector director de la recta.

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r\equiv\begin{cases}x+y+z-3=0\\x-y+2z+1=0\end{cases}\Rightarrow\ \underline{z=\lambda}\ \Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y=3-\lambda\\x-y=-1-2\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow 2x=2-3\lambda\ ;;\ \underline{x=1-\frac{3}{2}\lambda}$$

$$\left.\begin{array}{r}x+y=3-\lambda\\-x+y=1+2\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow 2y=4+\lambda\ ;;\ \underline{y=2+\frac{1}{2}\lambda}\ \Rightarrow\ \underline{r\equiv\begin{cases}x=1-\frac{3}{2}\lambda\\y=2+\frac{1}{2}\lambda\\z=\lambda\end{cases}}$$

Un vector director de la recta puede ser $\overrightarrow{v}=(-3,\ 1,\ 2)$, que se puede considerar con vector normal del plano.

La expresión general del plano es $\pi \equiv -3x+y+2z+D=0$.

Como el punto A(5, 0, 10) pertenece al plano tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv -3x+y+2z+D=0 \\ P(5,\ 0,\ 10)\end{array}\right\} \Rightarrow -3\cdot 5+0+2\cdot 10+D=0\ ;;\ -15+20+D=0\ ;;\ \underline{D=-5}$$

$$\underline{\underline{El\ \ plano\ \ pedido\ \ es\ \ \pi \equiv 3x-y-2z+5=0}}$$

b)

La distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al plano $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ viene dado por la fórmula $d(P_0,\ \pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto B(2, 1, 0) y al plano $\pi \equiv 3x-y-2z+5=0$:

$$d(B,\ \pi)=\frac{|3\cdot 2-1\cdot 1-2\cdot 0+5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{|6-1+5|}{\sqrt{9+1+4}}=\frac{|11|}{\sqrt{14}}=\underline{\underline{\frac{11\sqrt{14}}{14}\ unidades=d(B,\ \pi)}}$$

****

6º) a) Representa gráficamente la curva $y = f(x) = \dfrac{x}{x^2+5x+4}$. Para ello calcula asíntotas, puntos críticos e intervalos de crecimiento.

b) Calcula el área del recinto limitado por la curva anterior, el eje OX y las rectas x = 0 y x = 2.

----

a)

El dominio de una función racional es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2+5x+4=0 \;\;;;\;\; x=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-5\pm 3}{2} \Rightarrow \underline{x_1=-1} \;\;;;\;\; \underline{x^2=-4}$$

El dominio de la función es: $\underline{D(f) \Rightarrow R-\{-4,\ -1\}}$.

Por ser f(0) = 0, la función pasa por el origen de coordenadas.

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, derivamos:

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+5x+4\right)-x\cdot(2x+5)}{\left(x^2+5x+4\right)^2}=\frac{x^2+5x+4-2x^2-5x}{\left(x^2+5x+4\right)^2}=\underline{\frac{-x^2+4}{\left(x^2+5x+4\right)^2}=f'(x)}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -x^2+4=0 \;\;;;\;\; x^2=4 \Rightarrow \underline{x_1=-2} \;\;;;\;\; \underline{x_2=2}$$

Como el denominador de la derivada es siempre positivo, solamente estudiaremos el numerador que, teniendo en cuenta que para x = 0 es positivo, y los valores para los que no está definida la función, resulta:

$$f'(x)=\frac{-x^2+4}{\left(x^2+5x+4\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{f'(x)<0 \Rightarrow (-\infty,\ -4)\cup(-4,\ -2)\cup(2,\ +\infty) \Rightarrow \textit{Decreciente}}} \\ \underline{\underline{f'(x)>0 \Rightarrow (-2,\ -1)\cup(-1,\ 2) \Rightarrow \textit{Creciente}}} \end{cases}$$

Los puntos críticos de la función son los siguientes:

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2+5x+4\right)^2-\left(-x^2+4\right)\cdot 2\cdot\left(x^2+5x+4\right)\cdot(2x+5)}{\left(x^2+5x+4\right)^4}=$$

$$=\frac{-2x\left(x^2+5x+4\right)-2\left(-x^2+4\right)(2x+5)}{\left(x^2+5x+4\right)^3}=\frac{-2x^3-10x^2-8x+4x^3+10x^2-16x-40}{\left(x^2+5x+4\right)^3}=$$

$$=\frac{2x^3-24x-40}{\left(x^2+5x+4\right)^3}=\underline{\frac{2\left(x^3-12x-20\right)}{\left(x^2+5x+4\right)^3}=f''(x)}$$

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2+5x+4\right)^2-\left(-x^2+4\right)\cdot 2\cdot\left(x^2+5x+4\right)\cdot(2x+5)}{\left(x^2+5x+4\right)^4}=$$

$$=\frac{-2x\left(x^2+5x+4\right)-2\left(-x^2+4\right)(2x+5)}{\left(x^2+5x+4\right)^3}=\frac{-2x^3-10x^2-8x+4x^3+10x^2-16x-40}{\left(x^2+5x+4\right)^3}=$$

$$=\frac{2x^3-24x-40}{\left(x^2+5x+4\right)^3}=\underline{\frac{2\left(x^3-12x-20\right)}{\left(x^2+5x+4\right)^3}=f''(x)}$$

$$f''(2)=\frac{2\cdot(8-24-20)}{+}=\frac{(-)}{(+)}<0\ \Rightarrow\ \underline{M\acute{a}ximo\ \ relativo\ \ para\ \ x=2}$$

$$f(2)=\frac{2}{2^2+5\cdot 2+4}=\frac{2}{4+10+4}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}\ \Rightarrow\ ;\underline{\underline{M\acute{a}ximo:\ \ A\left(2,\ \frac{1}{2}\right)}}$$

$$f''(-2)=\frac{2\cdot(-8+24-20)}{\left[(-2)^2+5\cdot(-2)+4\right]^3}=\frac{2\cdot(-4)}{(-2)^3}>0\ \Rightarrow\ \underline{M\acute{i}nimo\ \ relativo\ \ para\ \ x=-2}$$

$$f(-2)=\frac{-2}{(-2)^2+5\cdot(-2)+4}=\frac{-2}{4-10+4}=\frac{-2}{-2}=1\ \Rightarrow\ \underline{\underline{M\acute{i}nimo:\ \ B(-2,\ 1)}}$$

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más infinito y a menos infinito.

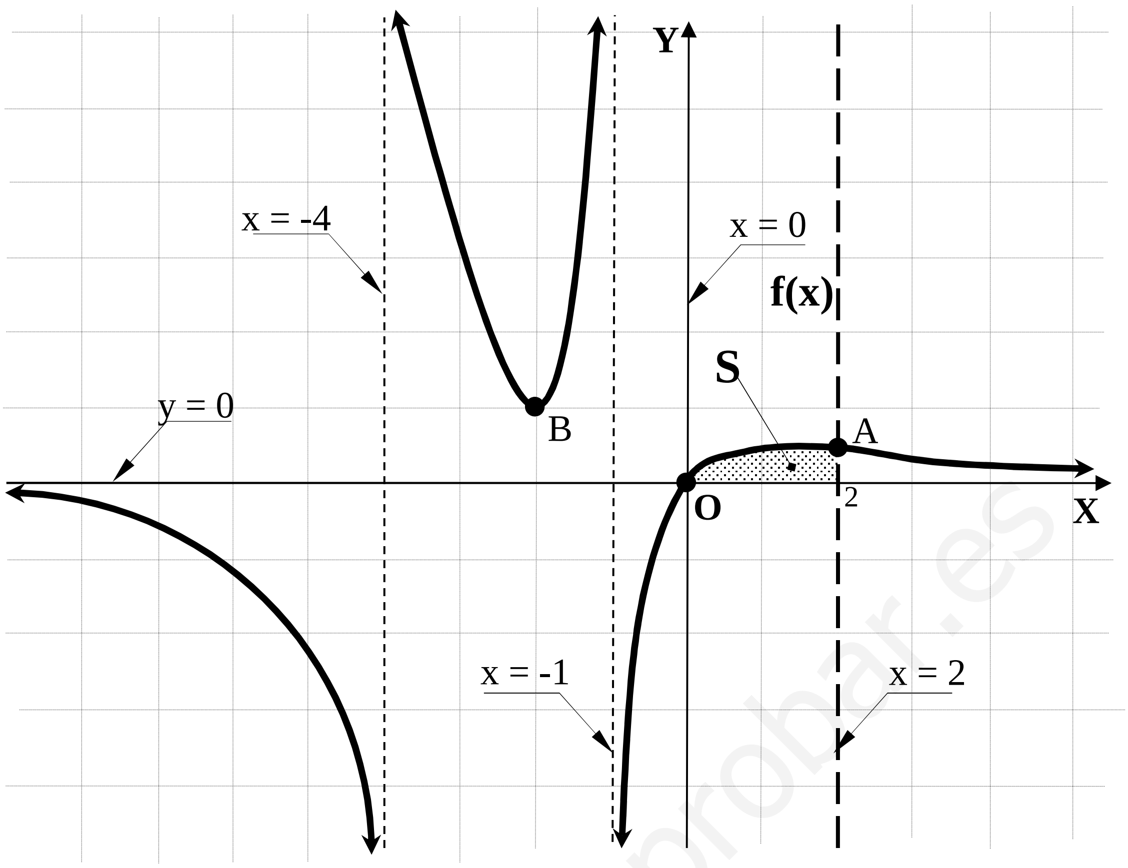
$$y=k\ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+5x+4}=0\Rightarrow\ \underline{\underline{y=0}}$$

Verticales: son los valores finitos de x que anulan el denominador.

$$x^2+5x+4=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{x_1=-4}}\ ;;\ \underline{\underline{x_2=-1}}$$

Oblicuas: Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador. En el caso que nos ocupa: no existen asíntotas oblicuas.

Con los datos obtenidos anteriormente se puede hacer un esquema, más o menos aproximado, de la función.



b)

El cálculo del área es el siguiente: $S=\int_0^2 f(x)\cdot dx=\int_0^2 \frac{x}{x^2+5x+4}\cdot dx$.

Teniendo en cuenta el valor de la integral indefinida, que es:

$$I=\int\frac{x}{x^2+5x+4}dx=\int\frac{x}{(x+1)(x+4)}dx=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+4}\right)dx=\int\frac{Ax+4A+Bx+B}{(x+1)(x+4)}dx=$$

$$=\int\frac{(A+B)x+(4A+B)}{(x+1)(x+4)}dx\Rightarrow\left.\begin{array}{r}A+B=1\\4A+B=0\end{array}\right\};;\left.\begin{array}{r}-A-B=-1\\4A+B=0\end{array}\right\}\rightarrow \underline{A=-\frac{1}{3}}\ ;;\ \underline{B=\frac{4}{3}}\Bigg\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\left(\frac{-\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{\frac{4}{3}}{x+4}\right)dx=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{4}{3}\int\frac{1}{x+4}dx=\underline{-\frac{1}{3}L(x+1)+\frac{4}{3}L(x+4)+C=I}$$

$$S=\int_0^2 f(x)\cdot dx=\left[-\frac{1}{3}L(x+1)+\frac{4}{3}L(x+4)\right]_0^2=-\frac{1}{3}(L3-L1)+\frac{4}{3}(L6-L4)=$$

$$=-\frac{1}{3}L3+\frac{4}{3}L\frac{6}{4}=\frac{1}{3}\left(4L\frac{3}{2}-L3\right)=\frac{1}{3}(4L3-4L2-L3)=\frac{1}{3}(3L3-4L2)=\underline{\underline{L3-\frac{4}{3}L2=S}}\cong$$

$$\cong 1'10-0'92=\underline{\underline{0'18u^2=S}}$$

****