

**PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)****UNIVERSIDAD DE LA RIOJA****JUNIO – 2004**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

**MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.  
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas.

**OPCIÓN A**

1º) Una recta  $r$  pasa por el punto  $P(1, -1, 0)$  y es paralela a los planos  $\pi_1 \equiv x + y = 1$  y  $\pi_2 \equiv x + z = 1$ . Hallar su ecuación.

-----

La recta  $r$  pedida es la intersección de los planos  $\pi'$  y  $\pi'_2$ , paralelos a  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , respectivamente, que pasen por el punto  $P$ :

$$\pi'_1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(1, -1, 0) \\ \pi_1 \equiv x + y - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi'_1 \equiv x + y + D_1 = 0 \ ; \ 1 - 1 + D_1 = 0 \ ; \ D_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\pi'_1 \equiv x + y = 0}$$

$$\pi'_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(1, -1, 0) \\ \pi_2 \equiv x + z - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi'_2 \equiv x + z + D_2 = 0 \ ; \ 1 + 0 + D_2 = 0 \ ; \ D_2 = -1 \Rightarrow$$

$$\underline{\pi'_2 \equiv x + z - 1 = 0}$$

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}}}$$

Nota: Obsérvese que el plano  $\pi_2$  y  $\pi'_2$  son coincidentes.

\*\*\*\*\*

2º) De una función  $f : (0, 2\pi) \rightarrow R$ , se sabe que  $f'(x) = \frac{\cos x}{-x}$ . Obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de f.

-----

Una función es creciente en un punto cuando su derivada es positiva en ese punto y decreciente cuando su derivada es negativa en ese punto.

Para determinar el signo de la derivada tendremos en cuenta que el valor de x en el intervalo dado es siempre positiva, por lo tanto, teniendo en cuenta el signo menos del denominador, será:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow x \in \left( \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \Rightarrow \underline{\underline{Creciente}}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left( \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right) \Rightarrow \underline{\underline{Decreciente}}$$

Para que exista un máximo o un mínimo relativo es necesario que se anule la primera derivada. En el intervalo dado se anula la derivada para:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\cos x}{-x} = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow \left\{ x_1 = \frac{\pi}{2} ; ; x_2 = \frac{3\pi}{2} \right\}$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos recurrimos a la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{-\operatorname{sen} x \cdot (-x) - \cos x \cdot (-1)}{(-x)^2} = \frac{\cos x + x \operatorname{sen} x}{x^2} = f''(x)$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{0 + \frac{\pi}{2} \cdot 1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{2}{\pi} > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{-\frac{\pi}{2}} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo}} \left( \frac{\pi}{2}, 0 \right)$$

$$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\cos \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} = \frac{0 + \frac{3\pi}{2} \cdot (-1)}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} = -\frac{2}{3\pi} < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Máximo}}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\cos \frac{3\pi}{2}}{-\frac{3\pi}{2}} = \frac{0}{-\frac{3\pi}{2}} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Máximo}} \left( \frac{3\pi}{2}, 0 \right)$$

\*\*\*\*\*

3º) Calcular la integral indefinida:  $\int \frac{dx}{(x-1)^2}$ .

-----

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)^2} \Rightarrow \begin{cases} x-1=t \\ dx=dt \end{cases} \Rightarrow I = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} \cdot dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x-1} + C = \underline{\underline{I}}$$

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es

4º) Hallar el valor que deben tomar los valores a, b y c para que la curva de ecuación  $f(x) = ax^2 + bx + c$  pase por los puntos A(1, 4), B(2, 9) y C(-3, 24).

-----

$$A(1, 4) \Rightarrow f(1) = 4 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 4 \quad ; ; \quad \underline{a + b + c = 4} \quad (1)$$

$$B(2, 9) \Rightarrow f(2) = 9 \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 9 \quad ; ; \quad \underline{4a + 2b + c = 9} \quad (2)$$

$$C(-3, 24) \Rightarrow f(-3) = 24 \Rightarrow a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c = 24 \quad ; ; \quad \underline{9a - 3b + c = 24} \quad (3)$$

Con las ecuaciones (1), (2) y (3) se forma el sistema: 
$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ 9a - 3b + c = 24 \end{array} \right\}$$

Resolviendo por Cramer: 
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 12 + 9 - 18 + 3 - 4 = -20$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 1 \\ 24 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-20} = \frac{8 - 27 + 24 - 48 + 12 - 9}{-20} = \frac{44 - 84}{-20} = \frac{-40}{-20} = \underline{\underline{2 = a}}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \\ 9 & 24 & 1 \end{vmatrix}}{-20} = \frac{9 + 96 + 36 - 81 - 24 - 16}{-20} = \frac{141 - 121}{-20} = \frac{20}{-20} = \underline{\underline{-1 = b}}$$

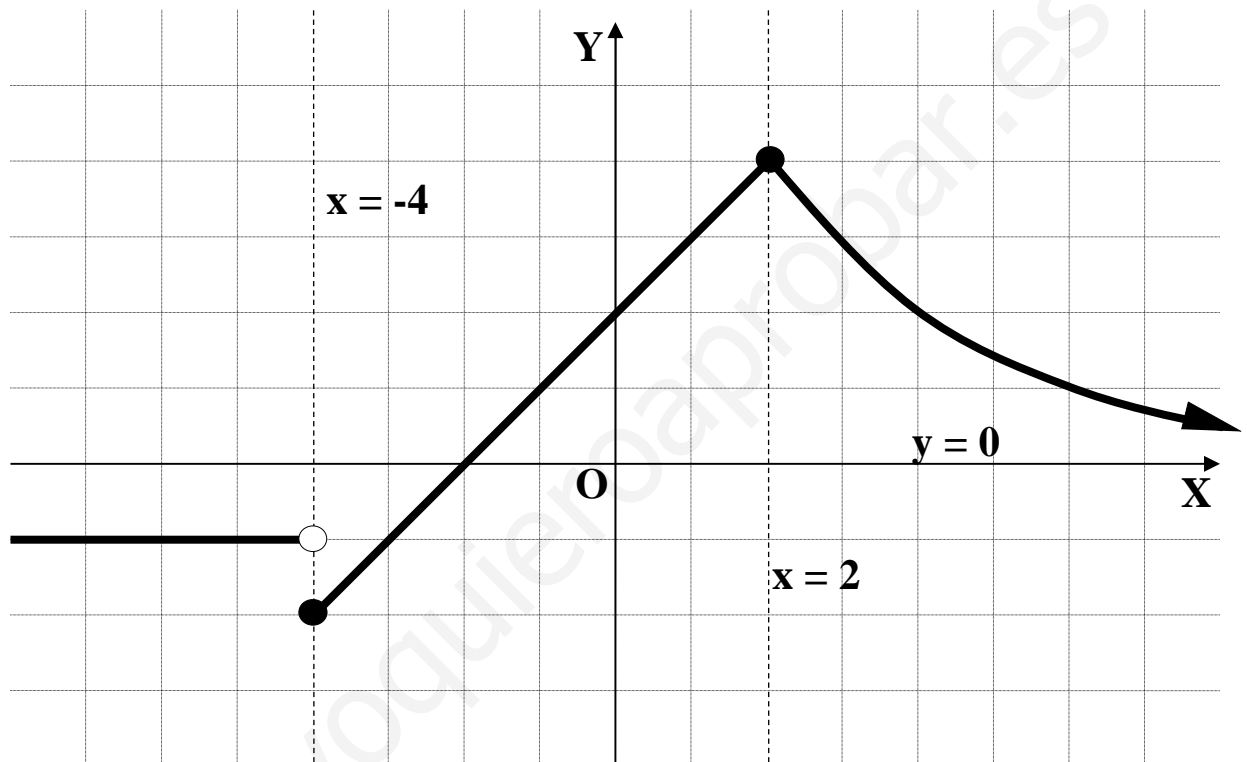
$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 9 \\ 9 & -3 & 24 \end{vmatrix}}{-20} = \frac{48 - 48 + 81 - 72 + 27 - 96}{-20} = \frac{108 - 168}{-20} = \frac{-60}{-20} = \underline{\underline{3 = c}}$$

\*\*\*\*\*

5º) Se considera la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -4 \\ x+2 & \text{si } -4 \leq x < 2 \\ \frac{8}{x} & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$  se pide:

- a) Representar gráficamente la función.  
 b) Estudiar la continuidad y derivabilidad de  $f(x)$ .

a)



b)

Para que una función sea continua en un punto es necesario que esté definida en ese punto y que los límites laterales existan y sean iguales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4} (-1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4} (x+2) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x)}}$$

La función es discontinua en  $x = -4$ .

Como para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto,  $f(x)$  no es derivable para  $x = -4$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = \underline{4} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8}{x} = \underline{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)}}$$

La función es continua en  $x = 2$ .

Para que una función sea derivable en un punto es necesario que sea continua en ese punto y además que existan sus derivadas laterales y que sean iguales:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -4 \\ x+2 & \text{si } -4 \leq x < 2 \\ \frac{8}{x} & \text{si } 2 \leq x \end{cases} \Rightarrow x=2 \Rightarrow \begin{cases} f'(x^-) = 1 \Rightarrow f'(2^+) = \underline{1} \\ f'(x^+) = -\frac{8}{x^2} \Rightarrow f'(2^+) = -\frac{8}{4} = \underline{\underline{-2}} \end{cases}$$

$f'(2^-) \neq f'(2^+) \Rightarrow$  La función no es derivable para  $x = 2$ .

\*\*\*\*\*

## OPCIÓN B

1º) Una recta pasa por el punto  $P(1, -1, 0)$  y es paralela a los planos  $\pi_1 \equiv x + y = 1$  y  $\pi_2 \equiv x + z = 1$ . Hallar su ecuación.

2º) De una función  $f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ , se sabe que  $f'(x) = \frac{\cos x}{-x}$ . Obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de  $f$ .

3º) Calcular la integral indefinida:  $\int \frac{dx}{(x-1)^2}$ .

-----  
(Resueltos en la opción A)

\*\*\*\*\*

4º) Dada la recta  $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{3}$  y el plano  $\pi \equiv x + 3y - 3z = 3$ , calcular:

a) El plano  $\pi'$  que contiene a  $r$  y es perpendicular a  $\pi$ .

b) El volumen del tetraedro determinado por el plano  $\pi$  y los planos coordenados.

a)

El plano  $\pi'$  tiene como vectores directores al director de  $r$ :  $\vec{v}_r = (2, 1, -3)$  y al normal al plano  $\pi$ :  $\vec{n} = (1, 3, -3)$  y contiene al punto  $P \in r$ :  $P(0, 1, -1)$ :

$$\pi'(P; \vec{v}_r, \vec{n}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad 3x + 6(z+1) + 3(y-1) + (z+1) - 9x + 6(y-1) = 0$$

$$-6x + 9(y-1) + 7(z+1) = 0 \quad ; ; \quad -6x + 9y - 9 + 7z + 7 = 0 \quad ; ; \quad \underline{\underline{\pi' \equiv 6x - 9y - 7z + 5z + 2 = 0}}$$

b)

Los puntos de intersección del plano  $\pi$  con los ejes coordenados son los siguientes:

$$\pi \equiv x + 3y - 3z = 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{Eje } X \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{A(3, 0, 0)} \\ \text{Eje } Y \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{B(0, 1, 0)} \\ \text{Eje } Z \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{C(0, 0, -1)} \end{cases}$$

Los vectores que determinan el tetraedro son:

$$\overrightarrow{OA} = (3, 0, 0) ;; \overrightarrow{OB} = (0, 1, 0) ;; \overrightarrow{OC} = (0, 0, -1)$$

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los mismos, en valor absoluto, será:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot |-3| = \underline{\underline{\frac{1}{2} u^3 = V}}$$

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es



5º) Hallar los extremos relativos de la función  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ . Calcular también los extremos absolutos de dicha función en el intervalo  $(-2, 2)$ .

-----

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) \;; \; f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4 \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \\ f''(1) = 12 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \\ f''(-1) = 12 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \end{cases}$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo}}} \Rightarrow A(0, 2)$$

$$f(1) = f(-1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 2 = 1 - 2 + 2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimos}}} \Rightarrow B(1, 1) \text{ y } C(-1, 1)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 4 = 0 \;; \; 4(3x^2 - 1) = 0 \; 3x^2 = 1 \;; \; x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$f'''(x) = 24x \Rightarrow \begin{cases} f'''(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión para } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ f'''(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión para } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 2 = \frac{1-3+18}{9} = \frac{16}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P.I. \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{16}{9}\right) \text{ y } P.I. \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{16}{9}\right)}}$$

La función es simétrica, por ser par, o sea:  $f(x) = f(-x)$ , por tanto los máximos y mínimos absolutos en el intervalo  $(-2, 2)$  serán:

$$f(2) = f(-2) = 2^4 - 2 \cdot 2^2 + 2 = 16 - 8 + 2 = 10 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximos abs.: } P(-2, 10) \text{ y } Q(2, 10)}}$$

Los mínimos relativos resultan ser también absolutos.

\*\*\*\*\*