PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

SEPTIEMBRE – 2004

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas.

OPCIÓN A

1º) Calcularla matriz X que verifica la ecuación: $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & -2, & 3 \end{pmatrix}$.

La matriz inversa de $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es la siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 1 = -2 \;;;\; M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Adj.\ M^T = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Multiplicando por la derecha por la matriz inversa obtenida resulta:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = (1,\ -2,\ 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \ ;;$$

$$X \cdot I = \left(0+2+3 \quad -\tfrac{1}{2}+1+\tfrac{9}{2} \quad \tfrac{1}{2}-1-\tfrac{3}{2}\right) \ ;; \ \underline{\underline{X = (5 \quad 5 \quad -2)}}$$

****

2º) Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ x - x}{x - tag\ x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x - x}{x - tag\ x} = \frac{0-0}{0-0} = \frac{0}{0} \Rightarrow L'Hopital \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{1 - \frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \cos^2 x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\cos^2 x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{1+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

****

3º) Dibujar la figura limitada por la curva $y=\frac{x^2}{4}+1$ y la recta $y=x+3$. Calcular el área de dicha figura.

Los puntos de corte de la curva y la recta son:

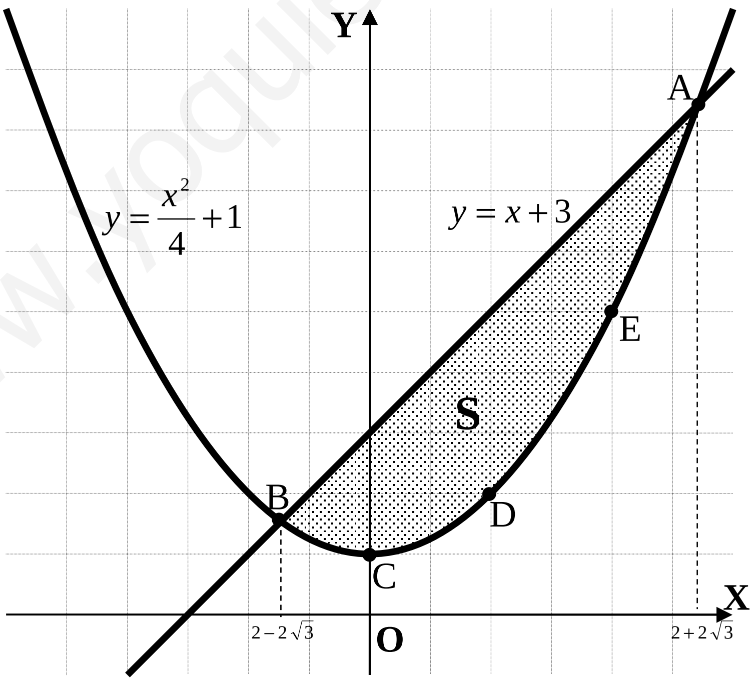
$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x^2}{4}+1 \\ y=x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{4}+1=x+3 \;;;\; \frac{x^2}{4}=x+2 \;;;\; x^2=4x+8 \;;;\; x^2-4x-8=0$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+32}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{48}}{2}=\frac{4\pm 4\sqrt{3}}{2}=2\pm 2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2+2\sqrt{3} \\ x_2=2-2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$y=x+3 \Rightarrow \begin{cases} y_1=5+2\sqrt{3} \Rightarrow \underline{A\left(2+2\sqrt{3},\ 5+2\sqrt{3}\right)} \\ y_2=5-2\sqrt{3} \Rightarrow \underline{B\left(2-2\sqrt{3},\ 5-2\sqrt{3}\right)} \end{cases}$$

Los puntos de corte de la recta con los ejes son M(-3, 0) y N(0, 3).

Teniendo en cuenta que la curva es simétrica con respecto al eje Y, que pasa por los puntos C(0, 1), D(2, 2) y E(4, 5), el gráfico de la situación se indica a continuación.



Por ser las ordenadas de la recta mayores que las de la curva, el área es:

$$S=\int_{2-2\sqrt{3}}^{2+2\sqrt{3}}\left[x+3-\left(\frac{x^2}{4}+1\right)\right]\cdot dx=\int_{2-2\sqrt{3}}^{2+2\sqrt{3}}\left(x+2-\frac{x^2}{4}\right)\cdot dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{12}\right]_{2-2\sqrt{3}}^{2+2\sqrt{3}}=$$

$$=\left[\frac{\left(2+2\sqrt{3}\right)^2}{2}+2\cdot\left(2+2\sqrt{3}\right)-\frac{\left(2+2\sqrt{3}\right)^3}{12}\right]-\left[\frac{\left(2-2\sqrt{3}\right)^2}{2}+2\cdot\left(2-2\sqrt{3}\right)-\frac{\left(2-2\sqrt{3}\right)^3}{12}\right]=$$

$$=\left(2+2\sqrt{3}\right)\left[\frac{2+2\sqrt{3}}{2}+2-\frac{\left(2+2\sqrt{3}\right)^2}{12}\right]-\left(2-2\sqrt{3}\right)\left[\frac{2-2\sqrt{3}}{2}+2-\frac{\left(2-2\sqrt{3}\right)^2}{12}\right]=$$

$$=\left(2+2\sqrt{3}\right)\left[3+\sqrt{3}-\frac{4+8\sqrt{3}+12}{12}\right]-\left(2-2\sqrt{3}\right)\left[3-\sqrt{3}-\frac{4-8\sqrt{3}+12}{12}\right]=$$

$$=\left(2+2\sqrt{3}\right)\left[3+\sqrt{3}-\frac{16+8\sqrt{3}}{12}\right]-\left(2-2\sqrt{3}\right)\left[3-\sqrt{3}-\frac{16-8\sqrt{3}}{12}\right]=$$

$$=\left(2+2\sqrt{3}\right)\left[3+\sqrt{3}-\frac{4+2\sqrt{3}}{3}\right]-\left(2-2\sqrt{3}\right)\left[3-\sqrt{3}-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}\right]=$$

$$=\left(2+2\sqrt{3}\right)\cdot\frac{9+3\sqrt{3}-4-2\sqrt{3}}{3}-\left(2-2\sqrt{3}\right)\cdot\frac{9-3\sqrt{3}-4+2\sqrt{3}}{3}=$$

$$=\left(2+2\sqrt{3}\right)\cdot\frac{5+\sqrt{3}}{3}-\left(2-2\sqrt{3}\right)\cdot\frac{5-\sqrt{3}}{3}=\frac{10+2\sqrt{3}+10\sqrt{3}+6}{3}-\frac{10-2\sqrt{3}-10\sqrt{3}+6}{3}=$$

$$=\frac{12\sqrt{3}+12\sqrt{3}}{3}=\frac{24\sqrt{3}}{3}=\underline{\underline{8\sqrt{3}\ u^2=S}}$$

****

4º) Representar la gráfica de la función $f(x)=\frac{3}{5}x^5-x^3$. Para ello calcular las asíntotas, intervalos de crecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.

Por tratarse de una función polinómica, su dominio es R y carece de asíntotas.

Es una función impar, por lo cual es simétrica con respecto al origen.

$$f'(x)=3x^4-3x^2=3x^2\left(x^2-1\right)\ ;;\ f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2\left(x^2-1\right)=0\ ;;\ \underline{x_1=0}\ ;;\ \underline{x_2=1}\ ;;\ \underline{x_3=-1}$$

$$\underline{Para\ \ |x|<1 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow Decreciente: (-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)}$$

$$\underline{Para\ \ |x|>1 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow Creciente: (-1,\ 1)}$$

$$f''(x)=12x^3-6x=6x\left(2x^2-1\right)\ ;;\ f''(0)=0 \Rightarrow \underline{No\ \ hay\ \ máximo\ \ ni\ \ mínimo\ \ para\ \ x=0.}$$

$$f''(1)=6\cdot(2-1)=6>0 \Rightarrow Mín.\ ;;\ f(1)=\frac{3}{5}-1=-\frac{2}{5} \Rightarrow \underline{Mínimo\ \ en\ \ A\left(1,\ -\frac{2}{5}\right)}$$

$$f''(-1)=-6\cdot(2-1)=-6<0 \Rightarrow Máx..\ ;;\ f(-1)=-\frac{3}{5}+1=\frac{2}{5} \Rightarrow \underline{Máximo\ \ en\ \ B\left(-1,\ \frac{2}{5}\right)}$$

$$f''(0)=0 \Rightarrow 6x\left(2x^2-1\right)=0\ ;;\ x_1=0\ ;;\ x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;;\ x_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;;\ f'''(x)=36x-6 \Rightarrow$$

$$f'''(0)=-6\neq 0 \Rightarrow P.I.\ \ para\ \ x=0\ ;;\ f(0)=0 \Rightarrow \underline{P.I.\ \ en\ \ O(0,\ 0)}$$

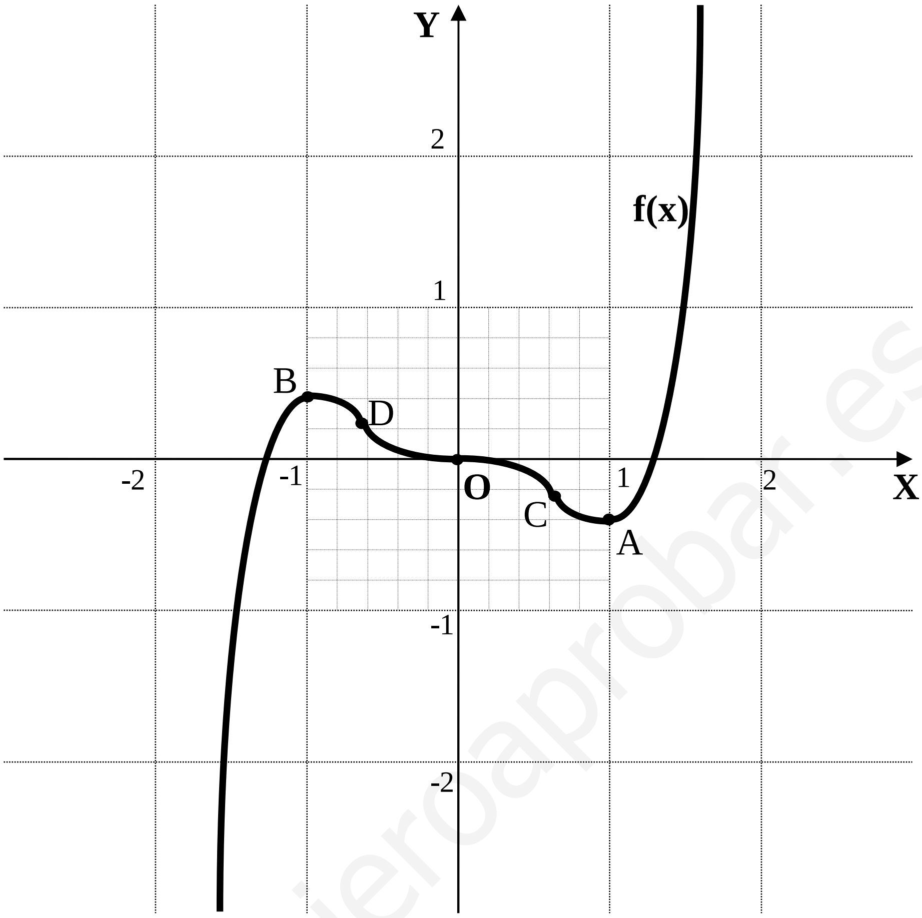
$$f\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=18\sqrt{2}-6\neq 0 \Rightarrow P.I.\ \ para\ \ x=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;;$$

$$f\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{3}{5}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{32}-\frac{2\sqrt{2}}{8}=-\frac{7\sqrt{2}}{40} \Rightarrow \underline{P.I.\ \ en\ \ C\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{7\sqrt{2}}{40}\right)}$$

Por simetría con respecto al origen: $\underline{P.I.\ \ en\ \ D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{7\sqrt{2}}{40}\right)}$

$$f''(x)=6x\left(2x^2-1\right) \Rightarrow \begin{cases} f''(x)<0 \Rightarrow Concavidad\ \ (\cap): x\in\left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \hline f''(x)>0 \Rightarrow Convexidad\ \ (\cup): x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right) \end{cases}$$

Con los datos obtenidos se puede obtener una gráfica bastante precisa de la función; vamos a centrarnos en el entorno del origen de coordenadas que es donde tiene mayor interés la gráfica.



****

5º) Dados los puntos A(1, 2, 0), B(-1, 0, 0), C(0, -2, 0) y D(0, 0, 1), se pide:

a) Ecuación de la recta que contiene a B y a C.

b) Área del triángulo ABC.

c) Volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

----

a)

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BC} = C - B = (0,\ -2,\ 0) - (-1,\ 0,\ 0) = (1,\ -2,\ 0).$$

$$r \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} B(-1,\ 0,\ 0) \\ \overrightarrow{u} = (1,\ -2,\ 0) \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{r \equiv (x,\ y,\ z) = (-1,\ 0,\ 0) + \lambda(1,\ -2,\ 0)}}$$

b)

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BA} = A - B = (1,\ 2,\ 0) - (-1,\ 0,\ 0) = (2,\ 2,\ 0).$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |\, 2k + 4k \,| = \frac{1}{2} \cdot |\, 6k \,| = \frac{1}{2} \cdot 6 = \underline{\underline{3u^2 = S_{ABC}}}$$

c)

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BD} = D - B = (0,\ 0,\ 1) - (-1,\ 0,\ 0) = (1,\ 0,\ 1)$$

Los vectores que determinan los cuatro puntos son $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$.

El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que determinan sus dimensiones:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \left[\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \right) \right] \right| = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot |\, 2 + 4 \,| = \frac{1}{6} \cdot |\, 6 \,| = \underline{\underline{1\ u^3 = V_{ABCD}}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Calcularla matriz X que verifica la ecuación: $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1,\ -2,\ 3)$.

2º) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x - x}{x - tag\ x}$.

3º) Dibujar la figura limitada por la curva $y = \frac{x^2}{4} + 1$ y la recta $y = x + 3$. Calcular el área de dicha figura.

(Resueltos en la opción A)

4º) Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x - y = -3 \\ -x + y = 3 \end{cases}$ e interpretar geométricamente la solución obtenida.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \ ;;\ M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ de\ \ M = 2}$$

$$|M'| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 12 + 3 - 3 + 6 - 12 = 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ de\ \ M' = 2}$$

$$\underline{\underline{Rango\ \ M = Rango\ \ M' \Rightarrow Compatible\ \ Deter\min ado}}$$

Es un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, por lo tanto se trata de tres rectas del plano, que no son ninguna coincidentes, por lo tanto:

<u>Se trata de tres rectas de un plano que se cortan en un punto.</u>

****

5º) Dados a y b dos números reales, calcular la integral definida $I = \int \frac{sen\ x}{(a + b\cos\ x)^2} \cdot dx$.

Prestar atención a las posibilidades a = 0 o b = 0.

$$I = \int \frac{sen\ x}{(a + b\cos\ x)^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} a + b\cos\ x = t \\ sen\ x \cdot dx = dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow I = \int \frac{1}{t^2} \cdot dt = \int t^{-2} \cdot dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C =$$

$$= -\frac{1}{t} + C = \underline{-\frac{1}{a + b\cos\ x} + C = I}$$

Debe hacerse constar que para a = 0 e y = 0 la función $f(x) = \frac{sen\ x}{(a + b\cos\ x)^2}$ no está determinada, por lo que la solución debe expresarse de la siguiente forma:

$$\underline{\underline{I = \frac{1}{a + b\cos\ x} + C,\ \forall a, b \in R,\ \{a \neq 0,\ b \neq 0,\ simultáneamente\}}}$$

****