PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

SEPTIEMBRE – 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

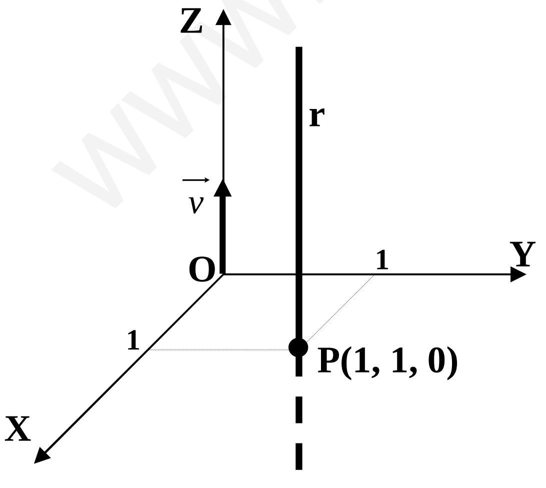
El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas.

OPCIÓN A

1º) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1, 1, 0) y es paralela al eje Z (una ecuación: la que se quiera). Hacer un esquema dibujando los ejes, el punto y la *recta*.

El eje Z tiene como dirección la del vector de la forma $\overrightarrow{v} = (0,\ 0,\ \lambda),\ \forall \lambda \in R$, siendo $\lambda \neq 0$.

Por ejemplo, sea el vector $\overrightarrow{v} = (0,\ 0,\ 1)$; una recta r sería: $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$



La representación gráfica aproximada es la siguiente:

****

2º) Hallar los puntos de discontinuidad de la función $f(x)=\frac{tag\ x}{x}$.

Nota: x está expresado en radianes.

Por ser una función racional, el primer punto a estudiar es para x = 0, que anula el denominador; en este caso, también se anula el denominador, por lo cual se produce una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Para su estudio recurrimos a los límites en ese punto.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{tag\ x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x\cdot\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{sen\ x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x}=1\cdot 1=1$$

La función es continua para x = 1.

Ahora estudiaremos la función en los valores que hacer $+\infty$ o $-\infty$ al numerador:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{tag\ x}{x}=\frac{+\infty}{\frac{\pi}{2}}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\frac{tag\ x}{x}=\frac{-\infty}{\frac{\pi}{2}}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\frac{Discontinuidad\ \ inevitable}{(salto\ \ \inf inito)}\right.$$

Dada la periodicidad de la función, cuyo periodo es π, existen puntos de discontinuidad para $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \forall k\in Z$.

$$\underline{\underline{Solución:\ La\ \ función\ \ es\ \ continua\ \ en\ \ R-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \forall k\in Z\right\}}}$$

****

3º) Calcular $\int_{-1}^{2} x \cdot |x| \cdot dx$.

Teniendo en cuenta que $|x| = \begin{cases} -x & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$, la integral se puede expresar de la forma siguiente:

$$\int_{-1}^{2} x \cdot |x| \cdot dx = \int_{-1}^{0} -x^2 \cdot dx + \int_{0}^{2} x^2 \cdot dx = -\int_{-1}^{0} x^2 \cdot dx + \int_{0}^{2} x^2 \cdot dx = \int_{0}^{-1} x^2 \cdot dx + \int_{0}^{2} x^2 \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{-1} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2} = \frac{(-1)^3}{3} - 0 + \frac{2^3}{3} - 0 = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \underline{\underline{\frac{7}{3} = I}}$$

****

4º) Estudiar y representar la función $f(x)=e^{-x^4}$.

La función está definida para R y es simétrica con respecto al eje de ordenadas, por ser $f(x)=f(-x)$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes. Para x = 0 es f(x) = 1. La función corta al eje de ordenadas en el punto A(0, 1).

La función no se anula para ningún valor real de x, $f(x)\neq 0,\ \forall x\in R$, por lo tanto, no existen puntos de corte con el eje de abscisas.

Por ser $f(x)>0,\ \forall x\in R$, la función está situada por encima del eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x^4}}=\frac{1}{\infty}=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{x^4}}=\frac{1}{\infty}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \underline{\text{Asíntota el eje X.}}$$

$$f'(x)=-4x^3\cdot e^{-x^4}=-\frac{4x^3}{e^{x^4}}\Rightarrow\begin{cases} x<0\to f'(x)>0\Rightarrow \underline{\textit{Creciente}\Rightarrow(-\infty,\ 0)} \\ x>0\to f'(x)<0\Rightarrow \underline{\textit{Decreciente}\Rightarrow(0,\ +\infty)}\end{cases}$$

$$f''(x)=-12x^2\cdot e^{-x^4}-4x^3\cdot(-4x^3)\cdot e^{-x^4}=\underline{4x^2\cdot e^{-x^4}(4x^4-3)=\frac{4x^2(4x^4-3)}{e^{-x^4}}=f''(x)}$$

Todas las primeras derivadas se anulan para x = 0, lo cual hace complejo el estudio local de la función para x = 0; sin embargo, considerando las características estudiadas hasta este momento, nos permiten razonar que existe un máximo relativo (en este caso absoluto) de la función para x = 0, teniendo en cuenta los intervalos de monotonía y su dominio.

Los intervalos de concavidad y convexidad los obtenemos de la igualdad a cero de la segunda derivada:

$$f''(x)=0\Rightarrow x^2\cdot e^{-x^4}(4x^4-3)=0\ ;;\ \underline{x_1=0}\ ;;\ 4x^4-3=0\ ;;\ 4x^4=3\ ;;\ x^4=\frac{3}{4}\ ;;$$

$$x^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;;\ x=\pm\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{2}}{2}=\pm\frac{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{2^2}}{2}=\pm\frac{\sqrt[4]{3\cdot 4}}{2}=\pm\frac{\sqrt[4]{12}}{2}\Rightarrow\begin{cases}\underline{x_1=\frac{\sqrt[4]{12}}{2}} \\ \underline{x_2=-\frac{\sqrt[4]{12}}{2}}\end{cases}$$

$$f'(x)=\frac{4x^2\left(4x^4-3\right)}{e^{-x^4}} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x<-\frac{\sqrt[4]{12}}{2} \rightarrow f''(x)>0 \\ -\frac{\sqrt[4]{12}}{2}<x<\frac{\sqrt[4]{12}}{2} \rightarrow f''(x)<0 \\ x>\frac{\sqrt[4]{12}}{2} \rightarrow f''(x)>0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow$$

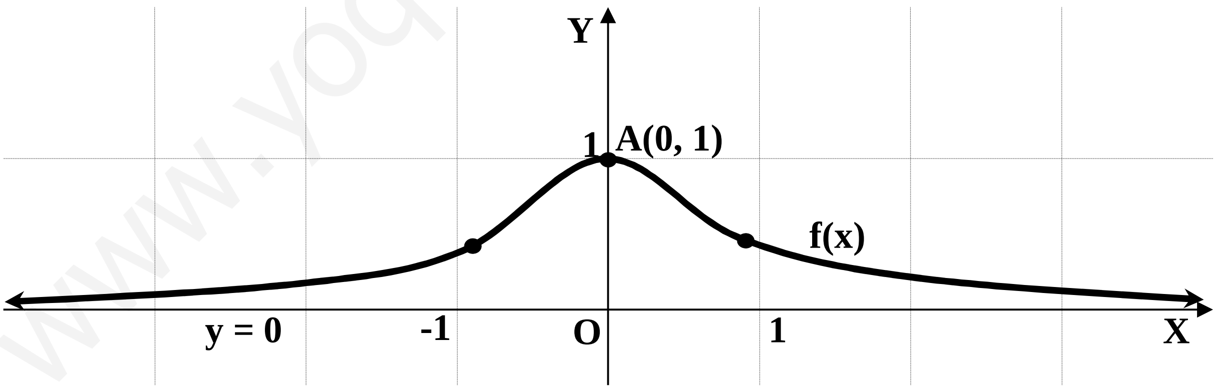
$$\underline{Convexidad\ \ (\cup) \quad \Rightarrow \quad \left(-\infty,\ \frac{\sqrt[4]{12}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt[4]{12}}{2},\ +\infty\right)}$$

$$\underline{Concavidad\ \ (\cap) \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{\sqrt[4]{12}}{2},\ \frac{\sqrt[4]{12}}{2}\right)}$$

Los puntos de inflexión se producen cuando la segunda derivada es cero:

$$f''(x)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=\frac{\sqrt[4]{12}}{2}\cong 0'93\ \ ;;\ \ y_1\cong 0'47 \Rightarrow Punto\ \ de\ \ inflexión:\ \underline{B(0'93,\ 0'47)} \\ x_2=0 \ \rightarrow (Máximo) \\ x_3=-\frac{\sqrt[4]{12}}{2}\cong -0'93\ \ ;;\ \ y_3\cong 0'47 \Rightarrow Punto\ \ de\ \ inflexión:\ \underline{C(-0'93,\ 0'47)} \end{array}\right.$$

La representación gráfica aproximada es la siguiente:



****

5º) Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2} \quad ;; \quad \lim_{x \to 0} (2x+1)^{\frac{1}{x}} \quad ;; \quad \lim_{x \to \frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2x-1}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2} = \frac{\infty-\infty}{\infty} \Rightarrow Indeterminado \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\left[\sqrt{x^2-2x}-(x-2)\right]\left[\sqrt{x^2-2x}+(x-2)\right]}{(x-2)\left[\sqrt{x^2-2x}+(x-2)\right]} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left[\sqrt{(x^2-2x)}\right]^2-(x-2)^2}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-2x}+x-2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2-2x-(x^2-2x+4)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-2x}+x-2\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2-2x-x^2+2x-4}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-2x}+x-2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-4}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-2x}+x-2\right)} = \frac{-4}{\infty \cdot \infty} = -\frac{4}{\infty} = \underline{\underline{0}}$$

* * * * *

$$\lim_{x \to 0} (2x+1)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty} \Rightarrow Indet. \ (número \ e) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c|c} 2x = \frac{1}{n} & x \to 0 \\ \frac{1}{x} = 2n & n \to \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^2 = \left[\lim_{x \to 0} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}\right]^2 = \underline{\underline{e^2}}$$

* * * * *

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2x-1}} = 3^{\frac{1}{1-1}} = 3^{\frac{1}{0}} = 3^{\infty} = \underline{\underline{\pm\infty}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1, 1, 0) y es paralela al eje Z (una ecuación: la que se quiera). Hacer un esquema dibujando los ejes, el punto y la recta.

2º) Hallar los puntos de discontinuidad de la función $f(x)=\frac{tag\ x}{x}$.

Nota: x está expresado en radianes.

3º) Calcular $\int_{-1}^{2} x \cdot |x| \cdot dx$.

(Resueltos en la Opción A)

4º) Evaluar el área encerrada por las funciones $f(x)=\frac{x}{x+1}$ y $g(x)=-\frac{1}{x+1}$ y las rectas x = - 2 y x = - 3. Representar gráficamente la situación.

La función f(x) corta al eje X solamente en el origen y la función g(x) no corta al eje X. La función g(x) corta al eje Y en el punto A(0, -1).

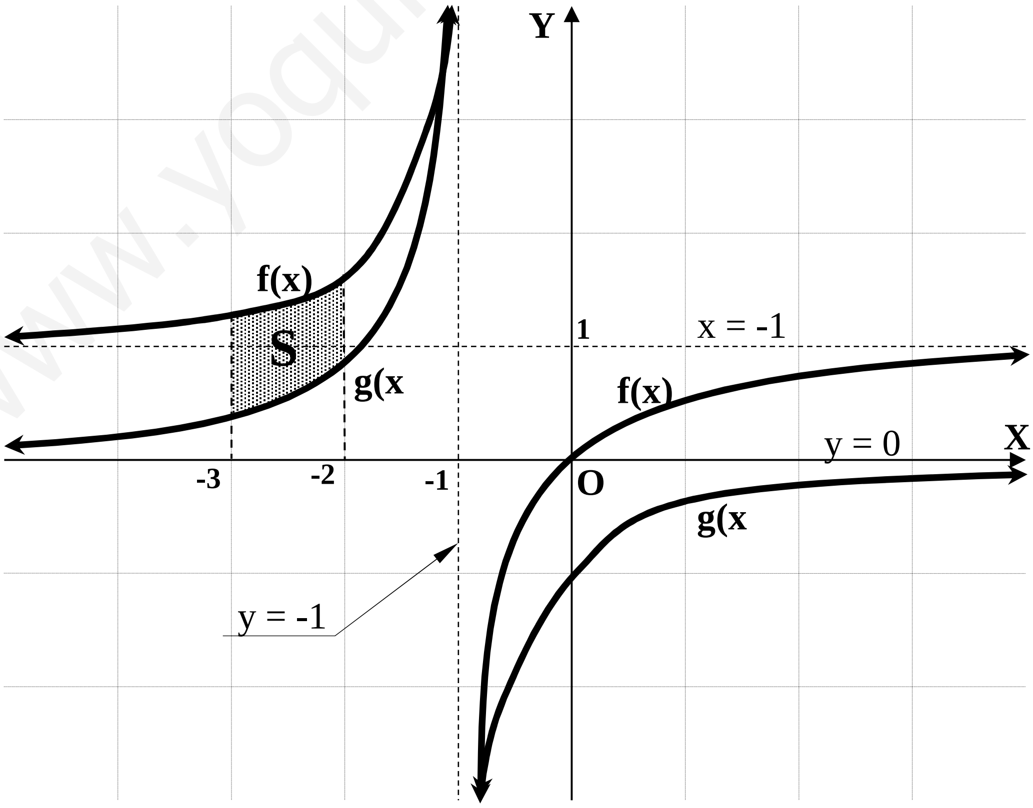
El dominio de ambas funciones es el mismo: R – {-1}. Las funciones no tienen puntos en comunes, debido a lo siguiente:

$f(x)=g(x) \Rightarrow \frac{x}{x+1}=-\frac{1}{x+1} \Rightarrow x=-1$, y para este valor no están definidas las funciones.

Las dos funciones tienen como asíntota vertical a la recta x = -1.

Por ser $\lim_{x \to \infty} f(x)=\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+1}=1$, la función f(x) tiene por asíntota horizontal a la recta y = 1.

Por ser $\lim_{x \to \infty} g(x)=\lim_{x \to \infty} \frac{-1}{x+1}=0$, la función g(x) tiene por asíntota horizontal a la recta y = 0, que es el eje de abscisas.



Con los razonamientos anteriores se puede tener una idea aproximada de la representación gráfica de la situación, que es la que indica la figura.

En el intervalo (-3, -2), todas las ordenadas de la función f(x) son mayores que las de la función g(x), por lo cual el área pedida es:

$$S=\int_{-3}^{-2}[f(x)-g(x)]\cdot dx=\int_{-3}^{-2}\left[\frac{x}{x+1}-\left(-\frac{1}{x+1}\right)\right]\cdot dx=\int_{-3}^{-2}\left(\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}\right)\cdot dx=\int_{-3}^{-2}\frac{x+1}{x+1}\cdot dx=$$

$$=\int_{-3}^{-2}dx=[x]_{-3}^{-2}=-2-(-3)=-2+3=\underline{\underline{1\ u^2\ =S}}$$

****

5º) Sean los planos $\pi \equiv 2x+4y-z+5=0$ y $\sigma \equiv x+y+6z-8=0$.

a) Probar que son perpendiculares.

b) Hallar la ecuación de la recta intersección de los planos, y expresarla de dos formas diferentes.

c) Encontrar un punto que no pertenezca a la intersección de los planos y que esté a igual distancia de ambos.

----

a)

Para probar que los planos son perpendiculares, basta con probar que sus vectores normales lo son.

Tendremos en cuenta que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero.

Los vectores normales son , respectivamente, $\overrightarrow{n_\pi}=(2,\ 4,\ -1)$ y $\overrightarrow{n_\sigma}=(1,\ 1,\ 6)$.

$$\overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{n_\sigma}=(2,\ 4,\ -1)\cdot(1,\ 1,\ 6)=2+4-6=0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi\ \ y\ \ \sigma\ \ son\ \ perpendiculares,\ c.q.p.}}$$

b)

La recta r que determinan los planos, expresada por dos ecuaciones continuas, es el sistema que forman los planos: $r \equiv \begin{cases} 2x+4y-z+5=0 \\ x+y+6z-8=0 \end{cases}$.

Vamos a expresar la recta r de varias formas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x+4y-z+5=0 \\ x+y+6z-8=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+4y=-5+\lambda \\ x+y=8-6\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+4y=-5+\lambda \\ -2x-2y=16+12\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y=11+13y\ \ ;;\ \ \underline{y=\frac{11}{2}+\frac{13}{2}\lambda}\ \ ;;\ \ x=8-6\lambda-\frac{11}{2}-\frac{13}{2}\lambda=\underline{\frac{5}{2}-\frac{25}{2}\lambda=x}$$

$$Un\ \ punto\ \ de\ \ r\ \ es,\ \ por\ \ ejemplo,\ \ para\ \ \lambda=2 \Rightarrow \underline{P(-10,\ 12,\ 2)}$$

$$Un\ \ vector\ \ director\ \ de\ \ r\ \ es:\ \underline{\overrightarrow{v}=(-25,\ 13,\ 1)}$$

Expresión de r por unas ecuaciones paramétricas: $\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x=-10-25\lambda \\ y=12+13\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}}}$

Expresión de r por unas ecuaciones continuas: $\underline{\underline{r \equiv \frac{x+10}{-25}=\frac{y-12}{13}=\frac{z-2}{1}}}$

Expresión de r por una ecuación vectorial:

$$\underline{\underline{r \equiv (x,\ y,\ z) = (-10,\ 12,\ 2) + \lambda(-25,\ 13,\ 1)}}$$

c)

El punto pedido pertenece a cualquiera de los dos planos bisectores de los planos dados, que son los planos cuyos puntos equidistan de los planos dados.

Sabiendo que la distancia de un punto a un plano viene dado por la siguiente expresión: $d = \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, sería:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x + 4y - z - 5 = 0 \\ \sigma \equiv x + y + 6z - 8 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,\ \pi) = d(P,\ \sigma) \Rightarrow \frac{2x + 4y - z - 5}{\pm\sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2}} = \frac{x + y + 6z - 8}{\pm\sqrt{1^2 + 1^2 + 6^2}} \ ;;$$

$$\frac{2x + 4y - z - 5}{\sqrt{4 + 16 + 1}} = \frac{x + y + 6z - 8}{\sqrt{1 + 1 + 36}} \ ;; \ \frac{2x + 4y - z - 5}{\sqrt{21}} = \frac{x + y + 6z - 8}{\sqrt{38}} \ ;;$$

Por ejemplo, haciendo x = 0, y = 0, resulta:

$$\sqrt{38}(-z - 5) - \sqrt{21}(6z - 8) = 0 \ ;; \ -\sqrt{38}z - 5\sqrt{38} = 6\sqrt{21}z + 8\sqrt{21} \ ;; \ \underline{z = \frac{-5\sqrt{38} - 8\sqrt{21}}{6\sqrt{21} + \sqrt{38}}}$$

$$\underline{\underline{P\left(0,\ 0,\ -\frac{-5\sqrt{38} - 8\sqrt{21}}{6\sqrt{21} + \sqrt{38}}\right)}}$$

****