PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2007

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Determina a y b para que la función $f(x)=ax^3+bx^2-x+2$ tenga un mínimo para el valor x = 2 y un punto de inflexión para $x=\frac{1}{3}$.

Para que la función f(x) tenga un mínimo para x = 2, es condición necesaria que se anule su primera derivada para ese valor:

$$f'(x)=3ax^2+2bx-1 \Rightarrow f(2)=0 \Rightarrow 3a\cdot 2^2+2b\cdot 2-1=0 \;;\; \underline{12a+4b-1=0} \quad (1).$$

Para que la función f(x) tenga un punto de inflexión para $x=\frac{1}{3}$, es condición necesaria que se anule su segunda derivada para ese valor:

$$f''(x)=6ax+2b \Rightarrow f\left(\tfrac{1}{3}\right)=0 \Rightarrow 6a\cdot\frac{1}{3}+2b=0 \;;\; 2a+2b=0 \;;\; \underline{a+b=0} \quad (2).$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) se obtienen los valores de a y b:

$$\left.\begin{array}{r}12a+4b=1\\ a+b=0\end{array}\right\} \;\; \begin{array}{l}\\ \to b=-a\end{array} \Rightarrow 12a-4a=1 \;;\; 8a=1 \;;\; \underline{\underline{a=\frac{1}{8}}} \;;\; \underline{\underline{b=-\frac{1}{8}}}$$

****

2º) Sea $P(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 3 & 3 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix}$. Halla dos raíces de este polinomio de grado cuatro.

Restando a cada fila la anterior: $P(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1-x & x-1 & 0 & 0 \\ 2 & 3-x & x-1 & 2 \\ 0 & 0 & 3-x & x-3 \end{vmatrix}$.

Sumando la cuarta columna a la tercera: $P(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 1 \\ 1-x & x-1 & 0 & 0 \\ 2 & 3-x & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix}$.

Desarrollando por los menores adjuntos de la ultima fila:

$$P(x)=(x-3)\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1-x & x-1 & 0 \\ 2 & 3-x & x+1 \end{vmatrix}.$$

Sumando a la segunda columna la primera: $P(x)=(x-3)\cdot\begin{vmatrix} x & x+1 & 2 \\ 1-x & 0 & 0 \\ 2 & 5-x & x+1 \end{vmatrix}$,

Desarrollando por los menores adjuntos de la segunda fila, teniendo en cuenta que el único elemento distinto de cero es el a_{12} y que 1 + 2 = 3, impar, es:

$$P(x)=(x-3)(x-1)\cdot\begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 5-x & x+1 \end{vmatrix}.$$

<u>Dos raíces del polinomio P(x) son x = 1 y x = 3.</u>

****

3º) Calcula la integral $I=\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\cdot dx$.

$$I=\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\cdot dx \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} 1+\sqrt{x}=t \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot dx=dt \\ \sqrt{x}=t-1 \;;;\; x=(t-1)^2 \rightarrow dx=2(t-1)dt \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; I=\int \frac{1+(t-1)^2}{t}\cdot 2(t-1)\cdot dt=2\int \frac{(1+t^2-2t+1)(t-1)}{t}\cdot dt=$$

$$=2\int \frac{(t^2-2t+2)(t-1)}{t}\cdot dt=2\int \frac{t^3-t^2-2t^2+2t+2t-2}{t}\cdot dt=2\int \frac{t^3-3t^2+4t-2}{t}\cdot dt=$$

$$=2\int\left(t^2-3t+4-\frac{2}{t}\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+4t-2L|t|\right)+C=\underline{\frac{1}{3}\left(2t^3-9t^2+24t-12L|t|\right)+C=I}$$

Deshaciendo el cambio de variable y operando:

$$I=\frac{1}{3}\left[2\left(1+\sqrt{x}\right)^3-9\left(1+\sqrt{x}\right)^2+24\left(1+\sqrt{x}\right)-12L\left(1+\sqrt{x}\right)\right]+C=$$

$$=\frac{1}{3}\left[2\left(1+3\sqrt{x}+3x+x\sqrt{x}\right)-9\left(1+2\sqrt{x}+x\right)+24+24\sqrt{x}-12L\left(1+\sqrt{x}\right)\right]+C=$$

$$=\frac{1}{3}\left[2+6\sqrt{x}+6x+2x\sqrt{x}-9-18\sqrt{x}-9x+24+24\sqrt{x}-12L\left(1+\sqrt{x}\right)\right]+C=$$

$$=\frac{1}{3}\left[17+12\sqrt{x}-3x+2x\sqrt{x}-12L\left(1+\sqrt{x}\right)\right]+C=\frac{1}{3}\left[17-3x+(12+2x)\sqrt{x}-12L\left(1+\sqrt{x}\right)\right]+C=$$

$$=\underline{\underline{-x+\frac{2}{3}(6+x)\sqrt{x}-4L\left(1+\sqrt{x}\right)+C=I}}$$

****

4º) Sea r la recta intersección de los planos $\alpha \equiv x+y+z=2$ y $\beta \equiv 2x+3y+z=3$. Calcula un punto de la recta r, un vector direccional y las ecuaciones de r en forma paramétrica y en forma continua. Halla también la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto A(2, 1, 3).

La recta r definida por los planos es $r \equiv \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ 2x+3y+z-3=0 \end{cases}$.

Para expresarla por unas ecuaciones paramétricas hacemos $\underline{z=\lambda}$:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ 2x+3y+z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=2-\lambda \\ 2x+3y=3-\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x-2y=-4+2\lambda \\ 2x+3y=3-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=-1+\lambda}$$

$$x+y=2-\lambda \;\;;;\;\; x=2-\lambda-(-1+\lambda)=2-\lambda+1-\lambda=\underline{3-2\lambda=x}$$

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas, por unas ecuaciones continuas, un punto y un vector direccional de la misma son:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}} \;\;;;\;\; \underline{\underline{r \equiv \frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}}} \;\;;;\;\; \underline{\underline{P(3,\ -1,\ 0)}} \;\;;;\;\; \underline{\underline{\overrightarrow{v}=(-2,\ 1,\ 1)}}$$

El plano π pedido tiene como vectores al vector director de r, $\overrightarrow{v}=(-2,\ 1,\ 1)$ y al vector que determinan los puntos A y P:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AP}=P-A=(3,\ -1,\ 0)-(2,\ 1,\ 3)=(1,\ -2,\ -3).$$

Teniendo en cuenta que π contiene al punto A(2, 1, 3), su ecuación general es:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{u}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}=0 \;\;;;$$

$$-3(x-2)+(y-1)+4(z-3)-(z-3)+2(x-2)-6(y-1)=0 \;\;;;$$

$$-(x-2)-5(y-1)+3(z-3)=0 \;\;;;\;\; -x+2-5y+5+3z-9=0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x+5y-3z+2=0}}$$

****

5º) Sea la función $f(x)=x^2 \cdot e^x$. Calcula sus asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión. Represéntela gráficamente.

El dominio de f(x) es R y $f(x) \geq 0,\ \forall x \in R$, lo cual indica que la gráfica de la función está situada en los cuadrantes primero y segundo.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 \cdot e^x\right)=+\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 \cdot e^x\right)=(-\infty)^2 \cdot e^{-\infty}=\frac{(-\infty)^2}{e^{\infty}}=\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}}=\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}}=\frac{-\infty}{-\infty}=\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-x}}=$$

$$=\frac{2}{\infty}=0 \Rightarrow \underline{\underline{El\ eje\ de\ abscisas\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ f(x)}}$$

Para determinar los periodos de crecimiento y decrecimiento recurrimos a su derivada:

$$f'(x)=2x \cdot e^x+x^2 \cdot e^x=xe^x(2+x)\ ;;\quad f'=0 \Rightarrow xe^x(2+x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=0} \\ \underline{x_2=-2} \end{cases}$$

$$f'(x)>0 \Rightarrow \underline{\underline{Creciente\ \forall x \in (-\infty,\ -2) \cup (0,\ +\infty)}}$$

$$f'(x)<0 \Rightarrow \underline{\underline{Decreciente\ \forall x \in (-2,\ 0)}}$$

Los máximos y mínimos relativos, si existen, son los valores que anulan la primera derivada, o sea: para x = 0 y para x = - 2.

Para diferenciar entre los posibles máximos o mínimos relativos recurrimos a la segunda derivada:

$$f''(x)=\left(e^x+x \cdot e^x\right)(2+x)+xe^x=e^x(1+x)(2+x)+xe^x=e^x\left[(1+x)(2+x)+x\right]=$$

$$=e^x\left(2+x+2x+x^2+x\right)=\underline{e^x\left(x^2+4x+2\right)=f''(x)}$$

$$f''(0)=2>0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ \ para\ \ x=0} \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo: O(0,\ 0)}}$$

$$f''(-2)=\frac{1}{e^2}(4-8+2)=-\frac{2}{e^2}<0 \;\Rightarrow\; \underline{Máximo\ \ para\ \ x=-2}$$

$$f(-2)=(-2)^2\cdot e^{-2}=\frac{4}{e^2}\;\Rightarrow\; \underline{\underline{Máximo: A\left(-2,\ \frac{4}{e^2}\right)}}$$

Los puntos de inflexión son los valores que anulan la segunda derivada y hacen distinto de cero la tercera derivada:

$$f''(x)=0\;\Rightarrow\; e^x\left(x^2+4x+2\right)=0\ ;;\ x^2+4x+2=0\ ;;\ x=\frac{-4\pm\sqrt{16-8}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{8}}{2}=$$

$$=\frac{-4\pm 2\sqrt{2}}{2}=-2\pm\sqrt{2}\;\Rightarrow\; \underline{x_1=-2+\sqrt{2}\cong -0'586}\ \ ;;\ \ \underline{x_2=-2-\sqrt{2}\cong -3'414}$$

$$f'''(x)=e^x\left(x^2+4x+2\right)+e^x(2x+4)=\underline{e^x\left(x^2+6x+6\right)=f'''(x)}$$

$$f'''\left(-2+\sqrt{2}\right)=e^{-2+\sqrt{2}}\left[\left(-2+\sqrt{2}\right)^2+6\cdot\left(-2+\sqrt{2}\right)+6\right]=e^{-2+\sqrt{2}}\left[4-4\sqrt{2}+2-12+6\sqrt{2}+6\right]=$$

$$=e^{-2+\sqrt{2}}\cdot 2\sqrt{2}\neq 0\;\Rightarrow\; \underline{P.\,I.\ \ para\ \ x=-2+\sqrt{2}}$$

$$f\left(-2+\sqrt{2}\right)\cong(-0'586)^2\cdot e^{-0'586}=0'343\cdot 0'557=0'19\;\Rightarrow\; \underline{\underline{P.\,I.\rightarrow B(-0'59,\ 0'19)}}$$

$$f'''\left(-2-\sqrt{2}\right)=e^{-2-\sqrt{2}}\left[\left(-2-\sqrt{2}\right)^2+6\cdot\left(-2-\sqrt{2}\right)+6\right]=e^{-2-\sqrt{2}}\left[4+4\sqrt{2}+2-12-6\sqrt{2}+6\right]=$$

$$=e^{-2-\sqrt{2}}\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)\neq 0\;\Rightarrow\; \underline{P.\,I.\ \ para\ \ x=-2-\sqrt{2}}$$

$$f\left(-2-\sqrt{2}\right)\cong(-3'414)^2\cdot e^{-3'414}=11'657\cdot 0'033=0'38\;\Rightarrow\; \underline{\underline{P.\,I\ \rightarrow\ C(-3'41,\ 0'38)}}$$

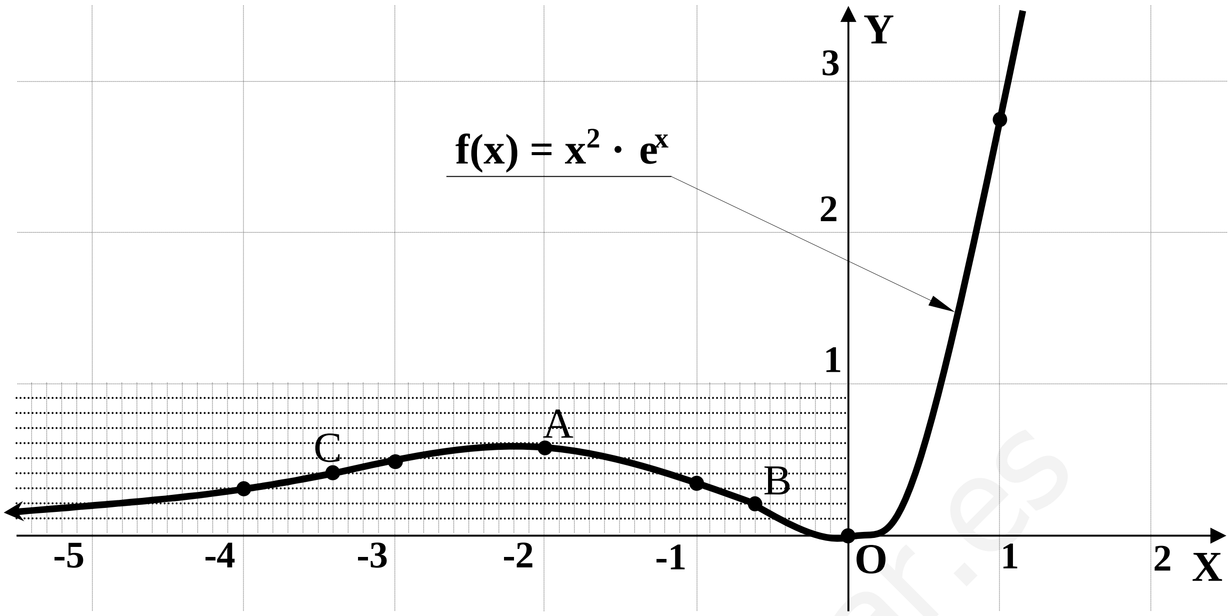
Para la representación gráfica de la función determinamos, aproximadamente, algunos puntos:

$$f(1)=1^2\cdot e^1=e\;\Rightarrow\; M(1,\ 2'72) \qquad f(2)=2^2\cdot e^2=4\cdot e^2\;\Rightarrow\; N(2,\ 29'56)\ ?$$

$$f(-1)=(-1)^2\cdot e^{-1}=\frac{1}{e}\;\Rightarrow\; Q(-1,\ 0'37) \qquad f(-2)=(-2)^2\cdot e^{-2}=\frac{4}{e^2}\;\Rightarrow\; A(-2,\ 0'54)$$

$$f(-3)=(-3)^2\cdot e^{-3}=\frac{9}{e^3}\;\Rightarrow\; S(-3,\ 0'45) \qquad f(-4)=(-4)^2\cdot e^{-2}=\frac{16}{e^4}\;\Rightarrow\; T(-4,\ 0'29)$$

La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la siguiente:



****

PROPUESTA B

1º) Determina a y b para que la función $f(x)=ax^3+bx^2-x+2$ tenga un mínimo para el valor x = 2 y un punto de inflexión para $x=\frac{1}{3}$.

2º) Sea $P(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 3 & 3 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix}$. Halla dos raíces de este polinomio de grado cuatro.

3º) Calcula la integral $I=\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} \cdot dx$.

(Resueltos en el apartado anterior)

4º) Discute, en función de los valores de a, y resuelve, en los casos en los que sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x-y-az=1 \\ -3x+2y+4z=a \\ -x+ay+z=0 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ -3 & 2 & 4 \\ -1 & a & 1 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -a & 1 \\ -3 & 2 & 4 & a \\ -1 & a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de M en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ -3 & 2 & 4 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix}=2+3a^2+4-2a-4a-3=3a^2-6a+3=0 \;\;;;\;\; a^2-2a+1=0 \;\;;;$$

$$(a-1)^2=0 \Rightarrow \underline{a=1}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a\neq 1 \Rightarrow Rango \; M = Rango \; M'=3=n^{o} \; incógnitas \Rightarrow Compatible \; \det er \min ado}}$$

$$\underline{Para \;\; a=1} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango \; de \; M' \Rightarrow \{C_1, \; C_2, \; C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3+1+2-1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; M' = 3}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a=1 \Rightarrow Rango \; M \neq Rango \; M' \Rightarrow Incompatible}}$$

Resolvemos para $a \neq 1$ por la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ a & 2 & 4 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}}{3a^2 - 6a + 3} = \frac{2 - a^3 - 4a + a}{3(a-1)^2} = \underline{\underline{\frac{-a^3 - 3a + 2}{3(a-1)^2} = x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ -3 & a & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{3(a-1)^2} = \frac{a - 4 - a^2 + 3}{3(a-1)^2} = \underline{\underline{\frac{-a^2 + a - 1}{3(a-1)^2} = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & a \\ -1 & a & 0 \end{vmatrix}}{3(a-1)^2} = \frac{-3a + a + 2 - a^2}{3(a-1)^2} = \underline{\underline{\frac{-a^2 - 2a + 2}{3(a-1)^2} = z}}$$

****

5º) Calcula el área limitada por la curva $y = x\sqrt{x+1}$, la recta y = 0, y la recta x = 1. Previamente, haz un esquema del recinto cuya área hay que calcular.

Los valores que puede tomar x son los pertenecientes al intervalo $[-1,\ +\infty)$.

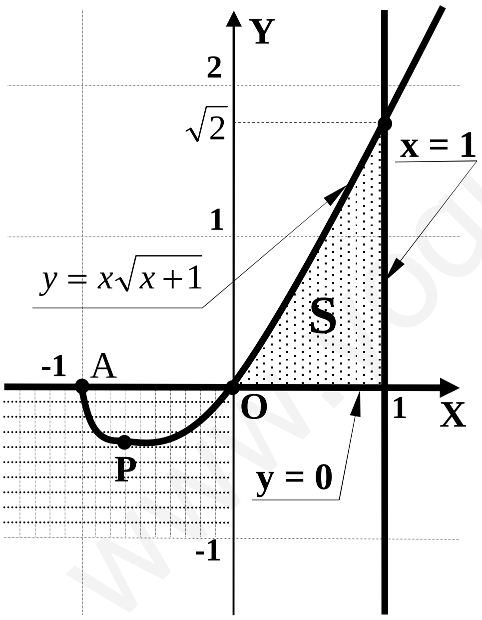
Los puntos de corte de la curva con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ \ X\ \Rightarrow\ y=0\ \Rightarrow\ x\sqrt{x+1}=0\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \ \rightarrow\ \underline{O(0,\ 0)} \\ \\ x_2 = -1\ \rightarrow\ \underline{A(-1,\ 0)} \end{cases}$$

$$Eje\ \ Y\ \Rightarrow\ x=0\ \Rightarrow\ y=0\ \Rightarrow\ \underline{O(0,\ 0)}$$

Los posibles máximos o mínimos de la curva son los valores de x que anulan la derivada:

$$y = x\sqrt{x+1} = \sqrt{x^3+x^2}\ \ ;;\ \ y' = \frac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2}} = \frac{x(3x+2)}{2x\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} = 0 \Rightarrow 3x+2=0\ \ ;;\ \ \underline{x=-\frac{2}{3}}$$



Teniendo en cuenta que la curva pasa por los puntos A(-1, 0) y O(0, 0) se trata, lógicamente, de un mínimo, que en este caso es absoluto, teniendo en cuenta que a partir de $x=-\frac{2}{3}$, a mayor valor de x corresponde un mayor valor de y. Lo anterior hace innecesario el estudio de la segunda derivada.

El punto mínimo es:

$$y_{\left(-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{2}{3}+1} = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{9} \cong -0'38\ \Rightarrow\ \underline{Mínimo:\ P(-0'67,\ -0'38)}$$

El punto de corte de la curva con la recta x = 1 es $Q(1,\ \sqrt{2})$.

La representación gráfica de la situación es , aproximadamente, la de la figura.

Para el cálculo del área pedida, que es la que está sombreada en la figura, hacemos los cambios en la variable y los límites de integración siguientes:

$$S=\int_0^1 x\sqrt{x+1}\cdot dx=\int_0^1 \frac{x\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\cdot dx=\int_0^1 \frac{x\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{\sqrt{x+1}}\cdot dx=\int_0^1 \frac{x(x+1)}{\sqrt{x+1}}\cdot dx\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=t\rightarrow x+1=t^2\ ;;\ x=t^2-1\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot dx=dt\ ;;\ \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}}=dt\end{array}\left\|\begin{array}{l}x=1\rightarrow t=\sqrt{2}\\ \\ x=0\rightarrow t=1\end{array}\right.\right\}\Rightarrow\ S=\int_1^{\sqrt{2}}\left(t^2-1\right)\cdot t^2\cdot 2\ dt=$$

$$=\ 2\cdot\int_1^{\sqrt{2}}\left(t^4-t^2\right)\cdot dt=2\cdot\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}}\ =2\cdot\left[\left(\frac{\sqrt{2}^5}{5}-\frac{\sqrt{2}^3}{3}\right)-\left(\frac{1^5}{5}-\frac{1^3}{3}\right)\right]=$$

$$=2\left[\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)\right]=2\left(\frac{12\sqrt{2}-10\sqrt{2}}{15}-\frac{3-5}{15}\right)=2\left(\frac{2\sqrt{2}}{15}+\frac{2}{15}\right)=\frac{4}{15}\left(\sqrt{2}+1\right)\cong$$

$$\cong\frac{4}{15}\cdot 2'41=\frac{9'66}{15}=\underline{\underline{0'64\ u^2=S}}$$

****