PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2009

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Hallad para qué valores de α la distancia entre el punto P(1, 2, 1) y el plano de ecuación $\pi \equiv 3x+4y+\alpha z+3=0$ es 2.

Sabiendo que la distancia de un punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ a un plano de ecuación general $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$, viene dada por la fórmula $d(P_0,\ \pi)=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, la distancia de P(1, 2, 1) al plano $\pi \equiv 3x+4y+\alpha z+3=0$ es la siguiente:

$$d(P,\ \pi)=2 \Rightarrow \frac{3\cdot 1+4\cdot 2+\alpha\cdot 1+3}{\pm\sqrt{3^2+4^2+\alpha^2}}=\frac{3+8+\alpha+3}{\pm\sqrt{9+16+\alpha^2}}=\frac{14+\alpha}{\pm\sqrt{25+\alpha^2}}=2\ ;;\ 14+\alpha=\pm 2\sqrt{25+\alpha^2}\ ;;$$

$$(14+\alpha)^2=4\left(25+\alpha^2\right)\ ;;\ 196+28\alpha+\alpha^2=100+4\alpha^2\ ;;\ 3\alpha^2-28\alpha-96=0.$$

$$\alpha=\frac{28\pm\sqrt{784+4\cdot 3\cdot 96}}{2\cdot 3}=\frac{28\pm\sqrt{784+1152}}{6}=\frac{28\pm\sqrt{1936}}{6}=\frac{28\pm 44}{6}=\frac{14\pm 22}{3} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \underline{\underline{\alpha_1=12}} \\ \underline{\underline{\alpha_2=-\frac{8}{3}}} \end{array}\right\}.$$

****

2º) Hallad las matrices A que verifican la ecuación $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Este ejercicio puede hacerse de varias formas; dos de ellas son las siguientes:

1ª) Sabiendo que la matriz A tiene que ser de la forma $A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 2x+3y+z \\ 3x+y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x+2y+3z=6 \\ 2x+3y+z=6 \\ 3x+y+2z=6 \end{matrix} \right\}.$$

Resolviendo por la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{6+6+6-27-1-8} = \frac{6 \cdot (6+3+2-9-1-4)}{18-36} = \frac{6 \cdot (11-14)}{-18} = \frac{-3}{-3} = \underline{1 = x}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{2+3+6-9-1-4}{-3} = \frac{11-14}{-3} = \frac{-3}{-3} = \underline{1 = y}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{3+6+2-9-1-4}{-3} = \frac{11-14}{-3} = \frac{-3}{-3} = \underline{1 = z}$$

$$\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

2ª forma)

Resolviendo por una ecuación matricial:

La matriz inversa de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es la siguiente:

$$M^T = M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \;;;\; |M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6+6+6-27-1-8 = 18-36 = \underline{-18 = |M|}$$

$$Adj\left(M^T\right) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{M^{-1} = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}}$$

Multiplicando los dos términos de la ecuación dada por la inversa hallada:

$$\frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \;;;$$

$$I \cdot A = \frac{6}{18} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -5+1+7 \\ 1+7-5 \\ 7-5+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A}}$$

****

3º) Calculad una función f tal que $f'(x)=\frac{x}{1+x^4}$, $f(1)=0$.

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{x}{1+x^4}\cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2=t \\ x\,dx=\frac{1}{2}dt \end{array} \right\} \Rightarrow f(t)=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\cdot arc\ tag\ t+C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{f(x)=\frac{1}{2}\cdot arc\ tag\ \left(x^2\right)+C}$$

Teniendo en cuenta que f(1) = 0:

$$f(1)=\frac{1}{2}\cdot arc\ tag\ \left(1^2\right)+C=1\ ;;\ \frac{1}{2}\cdot arc\ tag\ 1+C=1\ ;;\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+C=1\ ;;\ C=1-\frac{\pi}{8}=\underline{\frac{8-\pi}{8}=C}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot arc\ tag\ \left(x^2\right)+\frac{8-\pi}{8}=\underline{\underline{\frac{1}{8}\cdot\left[4\,arc\ tag\ \left(x^2\right)+8-\pi\right]=f(x)}}$$

****

4º) Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+c$, determinad a, b y c para que se cumpla que la función tenga un mínimo en el punto P(2, -3) y que $\int_0^2 f(x)dx=-2$.

Por contener al punto P(2, -3) tiene que ser:

$$f(2)=-3 \Rightarrow a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c=-3 \;;\; \underline{8a+4b+c=-3} \qquad (1)$$

Por tener un mínimo en el punto P(2, -3) debe anularse su derivada para x = 2:

$$f'(x)=3ax^2+2bx \Rightarrow f'(2)=0 \Rightarrow 3a\cdot 2^2+2b\cdot 2=0 \;;\; 12a+4b=0 \;;\; \underline{3a+b=0} \qquad (2)$$

$$\int_0^2 f(x)dx=-2 \;;\; \int_0^2 \left(ax^3+bx^2+c\right)dx=\left[\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^3}{3}+cx\right]_0^2=\left(\frac{a\cdot 2^4}{4}+\frac{b\cdot 2^3}{3}+c\cdot 2\right)-0=-2 \;;$$

$$4a+\frac{8}{3}b+2c=-2 \;;\; 12a+8b+6c=-6 \;;\; \underline{6a+4b+3c=-3} \qquad (3)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$$\left.\begin{array}{r} 8a+4b+c=-3 \\ 3a+b=0 \\ 6a+4b+3c=-3 \end{array}\right\} \rightarrow \underline{b=-3a} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 8a+4\cdot(-3a)+c=-3 \\ 6a+4\cdot(-3a)+3c=-3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 8a-12a+c=-3 \\ 6a-12a+3c=-3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -4a+c=-3 \\ -6a+3c=-3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4a-c=3 \\ -2a+c=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a=2 \;;\; \underline{\underline{a=1}} \;;\; b=-3a=\underline{\underline{-3=b}} \;;\; 4a-c=3 \;;\; c=4a-3=4-3=\underline{\underline{1=c}}$$

La función resulta ser: $\underline{\underline{f(x)=x^3-3x^2+1}}$

****

5º) Calculad una ecuación del plano π que pasa por los puntos A(1, 2, 3), B(2, 3, 1) y C(3, 1, 2). Calculad una ecuación de la recta r que pasa por los puntos P(1, 0, -1) y $Q(1,\ -1,\ 0)$. Determinad la posición relativa de la recta r y el plano π.

Los puntos A, B y C determinan los vectores:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(2,\ 3,\ 1)-(1,\ 2,\ 3)=(1,\ 1,\ -2)$$

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}=C-A=(3,\ 1,\ 2)-(1,\ 2,\ 3)=(2,\ -1,\ -1)$$

Considerando, por ejemplo, el punto A, la ecuación general de π es la siguiente:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0\ ;;$$

$$-(x-1)-4(y-2)-(z-3)-2(z-3)-2(x-1)+(y-2)=0\ ;;\ -3(x-1)-3(y-2)-3(z-3)=0\ ;;$$

$$x-1+y-2+z-3=0$$

$$\underline{\underline{\pi\equiv x+y+z-6=0}}$$

La recta r pedida tiene como vector director a $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{w}=\overrightarrow{PQ}=Q-P=(1,\ -1,\ 0)-(1,\ 0,\ -1)=(0,\ -1,\ 1).$$

Una expresión vectorial de la recta r es la siguiente:

$$\underline{\underline{r\equiv(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ -1)+\lambda(0,\ -1,\ 1)}}$$

El vector normal del plano π es $\overrightarrow{n}=(1,\ 1,\ 1)$.

Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{n}=(0,\ -1,\ 1)\cdot(1,\ 1,\ 1)=0-1+1=0$. El vector director de la recta es perpendicular al vector normal del plano, lo cual supone que:

<u>La recta r y el plano π son paralelos.</u>

****

PROPUESTA B

1º) Hallad para qué valores de α la distancia entre el punto P(1, 2, 1) y el plano de ecuación $\pi \equiv 3x + 4y + \alpha z + 3 = 0$ es 2.

2º) Hallad las matrices A que verifican la ecuación $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

3º) Calculad una función f tal que $f'(x) = \frac{x}{1 + x^4}$, $f(1) = 0$.

(RESUELTOS EN LA PROPUESTA A)

****

4º) Hallar para que valores de a y b la función $f(x)=\begin{cases} ax+b & si \;\; x \le 1 \\ \dfrac{4x}{1+x} & si \;\; 1 > x \end{cases}$ es continua y derivable en el punto x = 1. Calculad, para los valores de a y b calculados anteriormente, $\underset{x\to -\infty}{lím} f(x)$ y $\underset{x\to +\infty}{lím} f(x)$. Haced una gráfica de la función que refleje los datos obtenidos.

Para que una función f(x) sea continua para un valor de x, x = x_0, es necesario que existan los límites por la izquierda y por la derecha, que sean iguales e igual al valor de la función para ese valor.

Para que f(x) se continua en x = 1 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales e iguales a f(1):

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x\to 1^-}{lím} f(x)= \underset{x\to 1}{lím} (ax+b)= f(1)= \underline{a+b} \\ \\ \underset{x\to 1^+}{lím} f(x)= \underset{x\to 1}{lím} \dfrac{4x}{1+x^2} = \dfrac{4\cdot 1}{1+1} = \dfrac{4}{2} = \underline{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a+b=2} \qquad (*)$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} a & si \;\; x \le \\ \dfrac{4}{(1+x)^2} & si \;\; x>1 \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(1^-)=a \\ f'(1^+)=\dfrac{4}{(1+1)^2}=\dfrac{4}{4}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{a=1}} \Rightarrow (*) \Rightarrow \underline{\underline{b=1}}$$

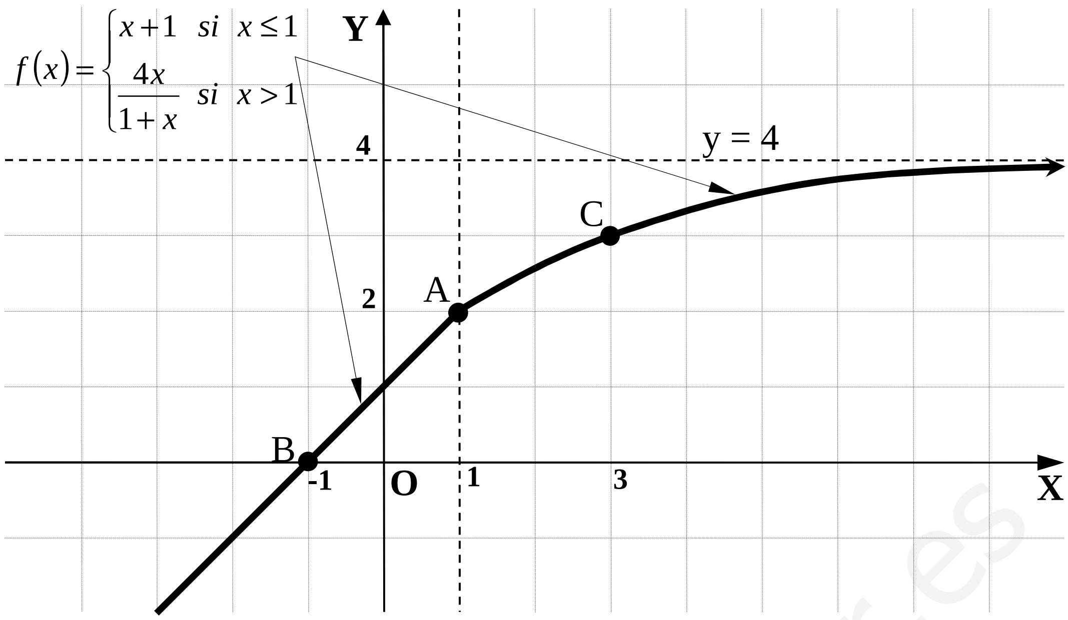
Para los valores de a y b hallados la función resulta ser $f(x)=\begin{cases} x+1 & si \;\; x \le 1 \\ \dfrac{4x}{1+x} & si \;\; 1 > x \end{cases}$.

$$\underset{x\to -\infty}{lím} f(x)= \underset{x\to -\infty}{lím} (x+1)= \underline{\underline{-\infty}} \qquad\qquad \underset{x\to +\infty}{lím} f(x)= \underset{x\to +\infty}{lím} \frac{4x}{1+x} = \underline{\underline{4}}$$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que se expresa en el gráfico adjunto.

Se ha tenido en cuenta que en el intervalo (-∞, 1) la función es f(x) = 1 + x, dos de puntos son A(1, 2) y B(-1, 0).

En el intervalo (1, +∞) la función es $f(x)=\dfrac{4x}{1+x}$, que tiene la asíntota horizontal $y=4$ y, además contiene a los puntos A(1, 2) y C(3, 3).


$f(x)=\begin{cases} x+1 & si \;\; x\leq 1 \\ \dfrac{4x}{1+x} & si \;\; x>1 \end{cases}$
Y
4
y = 4
C
2
A
B
-1
O
1
3
X

****

5º) Dados los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 1$, $\pi_2 \equiv 2x - 3y + z = 0$ y $\pi_3 \equiv \alpha x - 4y + 2z = b$, determinad a y b para que se corten en una recta real. Dad un punto y un vector director para r.

Para que los tres planos se corten en una recta es necesario que el sistema que formen sea compatible indeterminado y con un grado de libertad, es decir, que los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada sean iguales a dos (según el Teorema de Rouché-Fröbenius).

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ \alpha & -4 & 2 \end{pmatrix} \;\; y \;\; M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ \alpha & -4 & 2 & b \end{pmatrix}.$$

$$Rango\;\; M = 2 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ \alpha & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;\;;;\;\; -6 - 8 - \alpha + 3\alpha + 4 + 4 = 0 \;\;;;\;\; 2\alpha - 6 = 0 \;\;;;\;\; \underline{\underline{\alpha = 3}}.$$

$$M' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & b \end{vmatrix} \;\Rightarrow\; Rango\;\; M = 2 \;\Rightarrow\; \{F_1 + F_2 = F_3\} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{b = 1}}$$

Sabiendo que los planos se cortan en una recta r, ésta se puede expresar por el sistema formado por dos cualquiera de las ecuaciones de los planos, por ejemplo:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}}}$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; z = \lambda \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x - y = 1 - \lambda \\ 2x - 3y = -\lambda \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 2x - 2y = 2 - 2\lambda \\ -2x + 3y = \lambda \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \underline{y = 2 - \lambda} \;\;;;$$

$$x = 1 - \lambda + y = 1 - \lambda + 2 - \lambda = \underline{3 - 2\lambda = x} \;\;\Rightarrow\;\; \underline{r \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

$$\underline{\underline{Un\;\; punto\;\; y\;\; un\;\; vector\;\; de\;\; r\;\; son\;\; P(3,\; 2,\; 0)\;\; y\;\; \overrightarrow{v} = (2,\; 1,\; -1).}}$$

****