PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

SEPTIEMBRE – 2009

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Hallad, según el valor de α, el rango de la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & a & 4 \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$.

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & a & 4 \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} \Rightarrow \{\text{Restando a cada fila la anterior}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{vmatrix}=$$

$$=(a-2)(a^2-4)=(a-2)(a-2)(a+2)=(a-2)^2(a+2)=0 \Rightarrow \underline{a_1=-2} \;;;\; \underline{a_2=2}$$

$$Para\ \ a=-2 \Rightarrow |M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_3=4C_1\} \Rightarrow \underline{Rango\ \ M=2}.$$

$$Para\ \ a=2 \Rightarrow |M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_3=4C_1=2C_2\} \Rightarrow \underline{Rango\ \ M=1}.$$

$$Para\ \left\{\begin{matrix} a\neq -2 \\ a\neq 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rango\ \ M=3$$

$$\underline{\underline{Para \quad a=-2 \;\Rightarrow\; Rango \quad M=2}}$$

$$\underline{\underline{Para \quad a=2 \;\Rightarrow\; Rango \quad M=1}}$$

****

2º) Hallad todos los valores de α para los que se cumple que $\int_1^a \frac{8}{x^3} \cdot dx = 3$.

$$\int_1^a \frac{8}{x^3} \cdot dx = 3 \Rightarrow \left[8 \cdot \frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^{\alpha} = 3 \;;\; -4 \cdot \left[\frac{1}{x^2}\right]_1^{\alpha} = 3 \;;\; 4 \cdot \left[\frac{1}{x^2}\right]_{\alpha}^{1} = 3 \;;\; 4 \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) = 3 \;;$$.

$$4 \cdot \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) = 3 \;;\; 4 - \frac{4}{\alpha^2} = 3 \;;\; 1 = \frac{4}{\alpha^2} \;;\; \alpha^2 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha_1 = -2}} \;;\; \underline{\underline{\alpha_2 = 2}}$$

****

3º) Calculad un punto y un vector director de la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - z + 4 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que determinan la recta.

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_1} = (1,\ -1,\ -1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ -2,\ 1)$.

$$\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -i - j - 2k + k - 2i + j = -3i - k = (-3,\ 0,\ -1).$$

$$\underline{\underline{Un\ \ vector\ \ director\ \ de\ \ r\ \ es\ \ \overrightarrow{v} = (3,\ 0,\ 1)}}$$

Una forma sencilla de hallar un punto de r es haciendo cero una de las variables en su expresión dada por dos ecuaciones implícitas; por ejemplo, z = 0:

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z + 4 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = 0} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y = -4 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x - y = -4 \\ -x + 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y = -4}\ \ ;;\ \ \underline{x = -8}.$$

<u>Un punto de r es A(-8, -4, 0).</u>

Otra forma de hallar un punto de r puede ser expresando la recta r por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z + 4 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{y = \lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - z = -4 + \lambda \\ x + z = 2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = -4 + 3\lambda\ \ ;;\ \ \underline{x = -2 + \frac{3}{2}\lambda}$$

$$z = 2\lambda - x = 2\lambda + 2 - \frac{3}{2}\lambda = \underline{2 + \frac{1}{2}\lambda = z}$$

<u>Por ejemplo, para λ = 0, se obtiene el punto de r: B(-2, 0, 2).</u>

****

4º) Las rectas $r \equiv \begin{cases} x+2y+3z-14=0 \\ x-2y+3z-6=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x+y-z-\alpha=0 \\ x+y+\alpha z-6=0 \end{cases}$ se cortan en un punto. Calculad todos los posibles valores de α y los respectivos puntos de corte.

Si las rectas se cortan en un punto significa que el sistema formado por las dos rectas es compatible determinado, o sea, que los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e iguales al número de incógnitas, que es tres.

El sistema que determinan las rectas es $\begin{cases} x+2y+3z-14=0 \\ x-2y+3z-6=0 \\ 2x+y-z-a=0 \\ x+y+az-6=0 \end{cases}$ y las matrices de coeficientes y ampliada son $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & a & 6 \end{pmatrix}$.

Para que el rango de M' sea 3 es necesario que su rango sea 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & a & 6 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2-F_1 \\ F_3 \to F_3-2F_1 \\ F_4 \to F_4-F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -4 & 0 & -8 \\ 0 & -3 & -7 & a-28 \\ 0 & -1 & a-3 & -8 \end{vmatrix}=0 \;;;$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & -8 \\ -3 & -7 & a-28 \\ -1 & a-3 & -8 \end{vmatrix}=0 \;;; \begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & -7 & 28-a \\ 1 & a-3 & 8 \end{vmatrix}=0 \;;; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -7 & 28-a \\ 1 & a-3 & 8 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2-3F_1 \\ F_3 \to F_3-F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 22-a \\ 0 & a-3 & 6 \end{vmatrix}=0 \;;; \begin{vmatrix} -7 & 22-a \\ a-3 & 6 \end{vmatrix}=0 \;;; -42-(a-3)(22-a)=0$$

$$42+(a-3)(22-a)=0 \;;; 42+22a-a^2-66+3a=0 \;;; a^2-25a+24=0$$

$$a=\frac{25\pm\sqrt{625-96}}{2}=\frac{25\pm\sqrt{529}}{2}=\frac{25\pm 23}{2} \Rightarrow \underline{\underline{a_1=1}} \;;; \underline{\underline{a_2=24}}$$

Para α = 1 el sistema es $\begin{cases} x+2y+3z-14=0 \\ x-2y+3z-6=0 \\ 2x+y-z-1=0 \\ x+y+z-6=0 \end{cases}$. Para hallar el punto de corte despreciamos una de las ecuaciones, por ejemplo la primera, con lo cual resulta el siguiente sistema: $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+y-z=1 \\ x+y+z=6 \end{cases}$.

Resolviendo por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{6+3+12-18+6+2}{1+6+2-3+1+4}=\frac{11}{11}=\underline{1=x}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{11}=\frac{1+36-6-3+6-12}{11}=\frac{22}{11}=\underline{2=y}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{11}=\frac{6+12-2-6-1+24}{11}=\frac{33}{11}=\underline{3=z}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=1\ \ el\ \ punto\ \ de\ \ corte\ \ es\ \ A(1,\ 2,\ 3)}}$$

Para α = 24 el sistema es $\begin{cases} x+2y+3z-14=0 \\ x-2y+3z-6=0 \\ 2x+y-z-24=0 \\ x+y+24z-6=0 \end{cases}$. Para hallar el punto de corte despreciamos una de las ecuaciones, por ejemplo la cuarta, con lo cual resulta el siguiente sistema: $\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ x-2y+3z=6 \\ 2x+y-z=24 \end{cases}$. Resolviendo por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 6 & -2 & 3 \\ 24 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{28+18+144+144-42+12}{2+3+12+12-3+2}=\frac{304}{28}=\underline{\frac{76}{7}=x}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 14 & 3\\ 1 & 6 & 3\\ 2 & 24 & -1\end{vmatrix}}{28}=\frac{-6+72+84-36-72+14}{28}=\frac{56}{28}=\underline{2=y}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 14\\ 1 & -2 & 6\\ 2 & 1 & 24\end{vmatrix}}{28}=\frac{-48+14+24+56-6-48}{28}=\frac{-8}{28}=\underline{-\frac{2}{7}=z}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=24\ \ el\ \ punto\ \ de\ \ corte\ \ es\ \ B\left(\frac{76}{7},\ 2,\ -\frac{2}{7}\right)}}$$

****

5º) Calculad, si existen los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 0} (x\, L\, x) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x + \cos\, x + e^{x}}{x^{2}} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x + \cos\, x - e^{x}}{x^{2}}$$

$$\lim_{x \to 0} (x\, L\, x) = 0 \cdot L\ 0 = 0 \cdot (-\infty) = -0 \cdot \infty \Rightarrow In\det. \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{L\, x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\frac{1}{0}} = -\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'\,Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^{2}}} = -\lim_{x \to 0} x = -0 = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \cos\, x + e^{x}}{x^{2}} = \frac{0 + 1 + e^{0}}{0^{2}} = \frac{1+1}{0} = \frac{2}{0} = \underline{\underline{+\infty}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \cos\, x - e^{x}}{x^{2}} = \frac{0 + 1 - e^{0}}{0^{2}} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L'\,Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - sen\ x - e^{x}}{2x} =$$

$$= \frac{1 - 0 - e^{0}}{2 \cdot 0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L'\,Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{-\cos\, x - e^{x}}{2} = \frac{-1-1}{2} = \underline{\underline{-1}}$$

****

PROPUESTA B

1º) Hallad, según el valor de α, el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & a & 4 \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$.

2º) Hallad todos los valores de α para los que se cumple que $\int_1^a \frac{8}{x^3} \cdot dx = 3$.

3º) Calculad un punto y un vector director de la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - z + 4 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

(RESUELTOS EN LA PROPUESTA A)

****

4º) Discutid, según los valores de α, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y-z=2+\alpha \\ 2x+3y+\alpha z=5 \end{cases}$.

Resolvedlo cuando sea posible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2+a \\ 2 & 3 & a & 5 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix}=2a+3-2-4+3-a=\underline{a=0}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a\neq 0 \;\Rightarrow Rango \;\; M=Rango \;\; M'=3=n^{o} \;\; incógnitas \;\Rightarrow\; Compatible \;\; Deter\min ado}}$$

$$Para \;\; a=0 \;\Rightarrow\; M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango \;\; M=2}$$

$$Para \;\; a=0 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \{F_1+F_2=F_3\} \;\Rightarrow\; \underline{Rango \;\; M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; \alpha=0 \;\Rightarrow\; Rango \;\; M=Rango \;\; M'=2<n^{o} \;\; incóg. \;\Rightarrow\; Compatible \;\; In\det er\min ado}}$$

<u>α ≠ 0</u>

Resolvemos por la Regla de Cramer para α ≠ 0; el sistema es compatible determinado.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2+a & 2 & -1 \\ 5 & 3 & a \end{vmatrix}}{a}=\frac{6a+3(2+a)-5-10+9-a(2+a)}{a}=\frac{6a+6+3a-6-2a-a^2}{a}=\frac{7a-a^2}{a}=$$

$$=\frac{a(7-a)}{a}=\underline{7-a=x}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 2+a & -1\\ 2 & 5 & a\end{vmatrix}}{a}=\frac{a(2+a)+5-6-2(2+a)+5-3a}{a}=\frac{2a+a^2+4-4-2a-3a}{a}=\frac{a^2-3a}{a}=$$

$$=\frac{a(a-3)}{a}=\underline{a-3=y}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 2+a\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}}{a}=\frac{10+9+2(2+a)-12-5-3(2+a)}{a}=\frac{2+4+2a-6-3a}{a}=\frac{-a}{a}=\underline{-1=z}$$

$$\underline{\underline{Solución:\ x=7-z\ \ ;;\ \ y=a-3\ \ ;;\ \ z=-1}}$$

<u>α = 0</u>

El sistema resulta ser $\begin{cases}x+y+z=3\\ x+2y-z=2\\ 2x+3y=5\end{cases}$, que es compatible indeterminado. Para resolverlo despreciamos una ecuación, por ejemplo la tercera, y parametrizamos una de las incógnitas, por ejemplo z = λ:

$$\begin{cases}x+y+z=3\\ x+2y-z=2\end{cases}\Rightarrow\ \underline{z=\lambda}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{r}x+y=3-\lambda\\ x+2y=2+\lambda\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}-x-y=-3+\lambda\\ x+2y=2+\lambda\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \underline{y=-1+2\lambda}$$

$$x=3-\lambda-y=3-\lambda+1-2\lambda=\underline{4-3\lambda=x}$$

$$\underline{\underline{Solución:\ \begin{Bmatrix}x=4-3\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=\lambda\end{Bmatrix},\ \forall\lambda\in R}}$$

****

5º) Calculad el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x)=2x^6-3x^4$. Haced una gráfica de la función que refleje los datos obtenidos.

Por tratarse de una función polinómica y par, es continua y derivable en su domino, que es R, y también es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

$$\underline{\underline{D(f)\Rightarrow R}}$$

Las funciones polinómicas carecen de asíntotas.

<u>f(x) no tiene ninguna asíntota.</u>

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento recurrimos a su derivada: $f'(x)=12x^5-12x^3=12x^3(x^2-1)$.

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 12x^3(x^2-1)=0 \;\Rightarrow\; \underline{x_1=-1} \;;;\; \underline{x_2=0} \;;;\; \underline{x_3=1}$$

$$f'(x)<0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Decrecimiento:\ (-\infty,\ -1)\cup(0,\ 1)}}.$$

$$f'(x)>0 \;\Rightarrow\; x>1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Crecimiento:\ (-1,\ 0)\cup(1,\ +\infty)}}$$

Para que exista un extremo relativo en una función tiene que cumplirse que se anule la primera derivada y que la segunda derivada sea mayor o menor que cero.

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 12x^3(x^2-1)=0 \;\Rightarrow\; \underline{x_1=0} \;;;\; \underline{x_2=-1} \;;;\; \underline{x_3=1}.$$

$$f''(x)=60x^4-36x^2=12x^2(5x^2-3).$$

En el caso que nos ocupa se observa que la segunda derivada también se anula para el valor que anula la primera derivada: $f''(0)=0$, en cuyo caso debemos generalizar el concepto de extremo relativo teniendo en cuenta el siguiente teorema:

"Si f(x) es una función con derivada de orden n continua en un valor x_0 y tal que cumple que $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots\cdots f^{n-1}(x_0)=0 \;\; y \;\; f^n(x_0)\neq 0$, entonces:

1.- Si n es impar, la función f(x) es monótona en x_0, siendo estrictamente creciente cuando $f^n(x_0)>0$ y estrictamente decreciente cuando $f^n(x_0)<0$.

2- Si n es par, la función f(x) tiene un máximo relativo en x_0 cuando $f^n(x_0)<0$ y un mínimo relativo cuando $f^n(x_0)>0$".

Veamos cuál es la derivada que no se anula para x = 0:

$$f'''(x)=240x^3-72x=24x(10x^2-3) \;\Rightarrow\; \underline{f'''(0)=0}$$

$$f^{IV}(x)=720x^2-72=72(x^2-1) \;\Rightarrow\; \underline{f^{IV}(0)=-72\neq 0}$$

Según el teorema anterior, la función tiene un máximo relativo para x = 0.

$$f(0)=0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Máximo\;\;relativo:\;O(0,\;0)}}$$

$$f''(-1)=f''(1)=12(5-3)=24>0 \;\Rightarrow\; \underline{Mínimos\;\;relativos\;\;para\;\;x=-1\;\;y\;\;para\;\;x=1}.$$

$$f(1)=2-3=-1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Mínimo\;\;relativo:\;A(-1,\;-1)}}$$

Por simetría con respecto al eje de ordenadas:

$$\underline{\underline{Mínimo\;\;relativo:\;B(1,\;-1)}}$$

Los puntos de inflexión se encuentran en los valores de x que anulan la segunda derivada y no anulan la tercera derivada:

$$f''(x)=0 \;\Rightarrow\; 12x^2(5x^2-3)=0 \;\Rightarrow\; \underline{x_1=0}\;\;;;\;\;\underline{x_2=-\frac{\sqrt{15}}{5}}\;\;;;\;\;\underline{x_3=\frac{\sqrt{15}}{5}}.$$

Nótese que el valor x = 0 anula la tercera derivada por lo cual no es un punto de inflexión sino un máximo relativo, como se ha determinado con anterioridad.

$$f'''\left(-\tfrac{\sqrt{15}}{5}\right)=24\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)\cdot\left[-\frac{3}{5}-3\right]=-8\sqrt{15}\cdot\frac{-18}{5}=\frac{144\sqrt{15}}{5}\neq 0 \Rightarrow \underline{P.I.\;\;para\;\;x=-\frac{\sqrt{15}}{5}}.$$

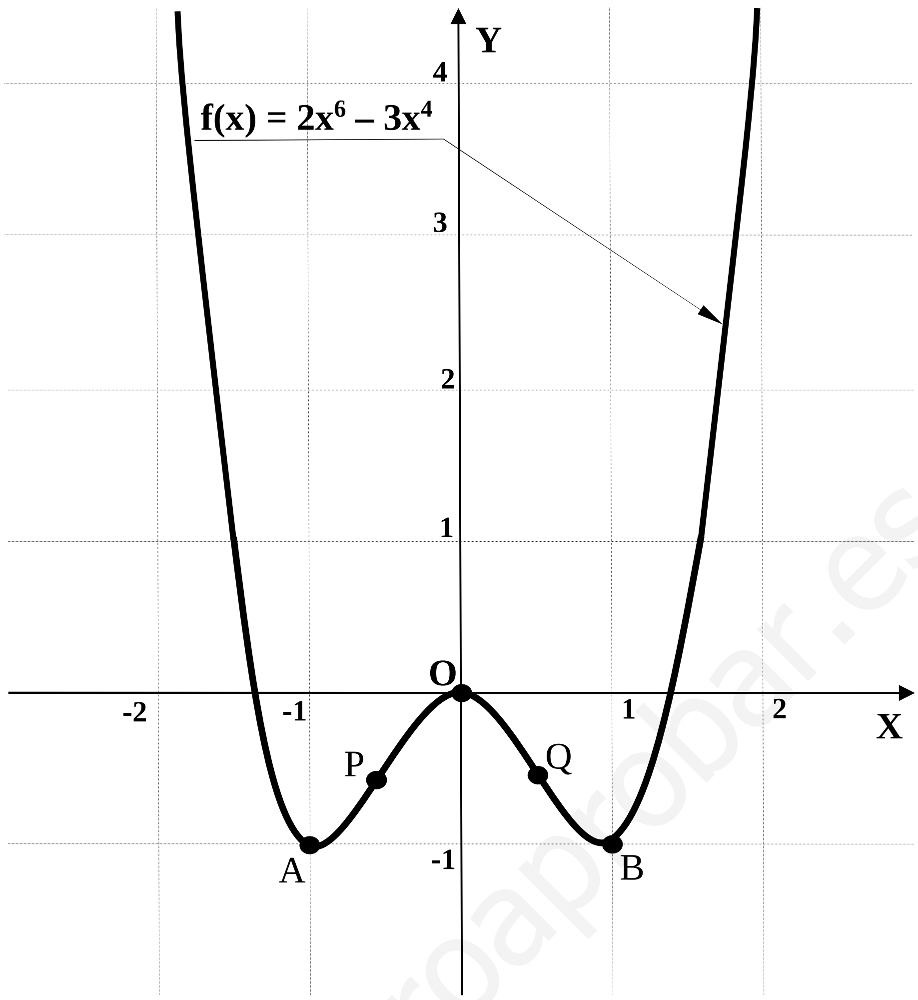
$$f\left(-\tfrac{\sqrt{15}}{5}\right)=2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3-3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{125}-\frac{27}{25}=\frac{54-135}{125}=-\frac{81}{125}.$$

$$\underline{\underline{Punto\;\;de\;\;inflexión:\;P\left(-\frac{\sqrt{15}}{5},\;-\frac{81}{125}\right)\;\cong\;P(-0'77,\;-0'65)}}$$

Por simetría con respecto al eje de ordenadas:

$$\underline{\underline{Punto\;\;de\;\;inflexión:\;Q\left(\frac{\sqrt{15}}{5},\;-\frac{81}{125}\right)\;\cong\;Q(0'77,\;-0'65)}}$$

Con los datos obtenidos puede hacerse una representación gráfica aproximada, que es la representada en la figura siguiente:


Y
4
$f(x) = 2x^6 - 3x^4$
3
2
1
O
-2
-1
1
2
X
P
Q
A
-1
B

****