PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2011 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Contesta razonadamente si, para la función $f(x)=L(x^2+3x)$ existe algún punto en el que la recta tangente a la gráfica de f(x) es perpendicular a la recta $2x-y+2=0$.

La pendiente a una función en un punto es el valor de la derivada de la función en ese punto. Por otra parte, la pendiente de la recta $2x-y+2=0$, $y=2x+2$, es m = 2.

Las rectas perpendiculares tienen sus pendientes inversas y de signo contrario, por lo cual, la pendiente de la tangente a la función $f(x)=L(x^2+3x)$ es $m'=-\frac{1}{2}$.

$$f'(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x}=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ -4x-6=x^2+3x\ ;;\ x^2+7x+6=0.$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-24}}{2}=\frac{-7\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-7\pm5}{2}\ \Rightarrow\ \underline{x_1=-6}\ ;;\ \underline{x_2=-1}.$$

$$f(-6)=L\left[(-6)^2+3\cdot(-6)\right]=L(36-18)=L18\ \Rightarrow\ \underline{A(-6,\ L18)}.$$

$$f(-1)=L\left[(-1)^2+3\cdot(-1)\right]=L(1-3)=L(-2)\ \Rightarrow\ \underline{-1\notin D(f)}.$$

El único punto que cumple la condición pedida es A(-6, L18).

****

2º) Encuentra un vector de módulo 1 que sea ortogonal a los vectores de coordenadas (1, 0, 1) y (1, 2, 0).

Un vector ortogonal a los vectores $\overrightarrow{u}=(1,\ 0,\ 1)\ y\ \overrightarrow{v}=(1,\ 2,\ 0)$ es cualquier vector $\overrightarrow{w'}$ que sea linealmente dependiente de su producto vectorial:

$$\overrightarrow{w'}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=j+2k-2i=-2i+j+2k=(-2,\ 1,\ 2)\Rightarrow \underline{\overrightarrow{w}=(2,\ -1,\ -2)}.$$

Como el vector pedido tiene que ser unitario, basta dividir sus componentes por el módulo de $\overrightarrow{w}$: $\left|\overrightarrow{w}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{4+1+4}=\sqrt{9}=3$.

El vector unitario pedido es: $\underline{\underline{\overrightarrow{a}=\left(\frac{2}{2},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)}}$.

Nota: También es válido el vector opuesto de $\overrightarrow{a}$.

****

3º) Halla una función f(x) que pase por el punto A(0, 1) y tal que $f'(x)=\left(x^2-4\right)\cdot e^x$.

$$f(x)=\int f'(x)\cdot dx=\int\left(x^2-4\right)\cdot e^x\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x^2-4=u \rightarrow 2xdx=du \\ e^x\,dx=dv \rightarrow e^x=v \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\left(x^2-4\right)\cdot e^x-\int e^x\cdot 2x\,dx=\left(x^2-4\right)\cdot e^x-2\int x\,e^x\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=u \rightarrow dx=du \\ e^x\,dx=dv \rightarrow e^x=v \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\left(x^2-4\right)\cdot e^x-2\cdot\left(x\cdot e^x-\int e^x\cdot dx\right)=\left(x^2-4\right)\cdot e^x-2x\cdot e^x+2e^x+C=e^x\left(x^2-4-2x+2\right)+C=$$

$$=\underline{e^x\left(x^2-2x-2\right)+C=f(x)}.$$

Como f(x) contiene al punto A(0, 1) tiene que satisfacer su ecuación:

$$f(0)=1 \Rightarrow e^0\left(0^2-2\cdot 0-2\right)+C=1 \;;;\; -2+C=1 \;;;\; \underline{C=3}.$$

$$\underline{\underline{f(x)=e^x\left(x^2-2x-2\right)+3}}$$

****

4º) Calcula el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento, máximos y mínimos y los puntos de inflexión de la función $f(x)=x-L(x^2-1)$. Representa la gráfica de f(x) a partir de los datos obtenidos.

Las funciones logarítmicas $(\log_a x)$ tienen por dominio $(0,\ +\infty)$, por lo cual el dominio de la función $f(x)=x-L(x^2-1)$ es el conjunto de valores reales de x tales que $x^2-1>0$, o sea: $x^2>1 \Rightarrow |x|>1$.

$$\underline{\underline{D(f) \Rightarrow (-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)}}$$

La función $f(x)=x-L(x^2-1)$ puede expresarse de la forma $f(x)=Le^x-L(x^2-1)$ o también: $f(x)=L\frac{e^x}{x^2-1}$.

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(L\frac{e^x}{x^2-1}\right)=L\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2-1}=L\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow L'Hopital \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=L\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow L'Hopital \Rightarrow L\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=L\infty=\infty \Rightarrow \underline{\underline{No\ tiene\ asístotas\ hor.}}$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$\underline{\underline{x_1=-1}}\ ;;\ \underline{\underline{x_2=1}}$$

Oblicuas: son de la forma y = mx + n, siendo m real y distinto de 0 y n real.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-L(x^2-1)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[1-\frac{L(x^2-1)}{x}\right]=1-\lim_{x\to\infty}\frac{L(x^2-1)}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{L(x^2-1)}{x}=\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow L'Hopital \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2s}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2-1}=0 \Rightarrow \underline{m=1}.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(x-L(x^2-1)-x\right)=-\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow$$

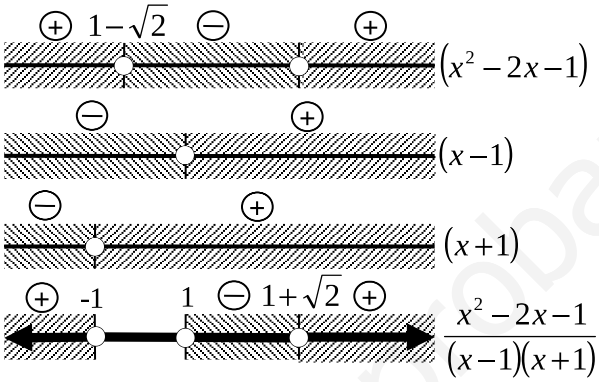
No tiene asíntotas oblicuas.

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=1-\frac{2x}{x^2-1}=\frac{x^2-1-2x}{x^2-1}=\underline{\frac{x^2-2x-1}{(x-1)(x+1)}=f'(x)}.$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}\Rightarrow \underline{x_1=1+\sqrt{2}}\ ;;\ \underline{x_2=1-\sqrt{2}\notin D(f)}.$$

Para estudiar el signo de la derivada nos valemos del gráfico siguiente, teniendo en cuenta el dominio de la función:



De la observación de la figura anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{\underline{Crecimiento:\ (-\infty,\ -1)\cup\left(1+\sqrt{2},\ +\infty\right)}}$$

$$\underline{\underline{Decrecimiento:\ \left(1,\ 1+\sqrt{2}\right)}}$$

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo para los valores que anulan la primera derivada. Para diferenciar entre máximos y mínimos se recurre a la segunda derivada: según que sea positiva o negativa para los valores que anulan la primera derivada, el extremo relativo es un mínimo o un máximo, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{x^2-1}\ \Rightarrow\ f''(x)=\frac{(2x-2)(x^2-1)-(x^2-2x-1)(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^2+2-2x^3}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{2x^3-2x-2x^2+2-2x^3+4x^2+2x}{(x^2-1)^2}=\underline{\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2}=f''(x)}.$$

No se considera el valor $x=1-\sqrt{2}$ que anula la primera derivada por no pertenecer al dominio de la función. Teniendo en cuenta que $f''(x)>0,\ \forall x\in R$, para el valor $x=1+\sqrt{2}$ la función tiene un mínimo relativo.

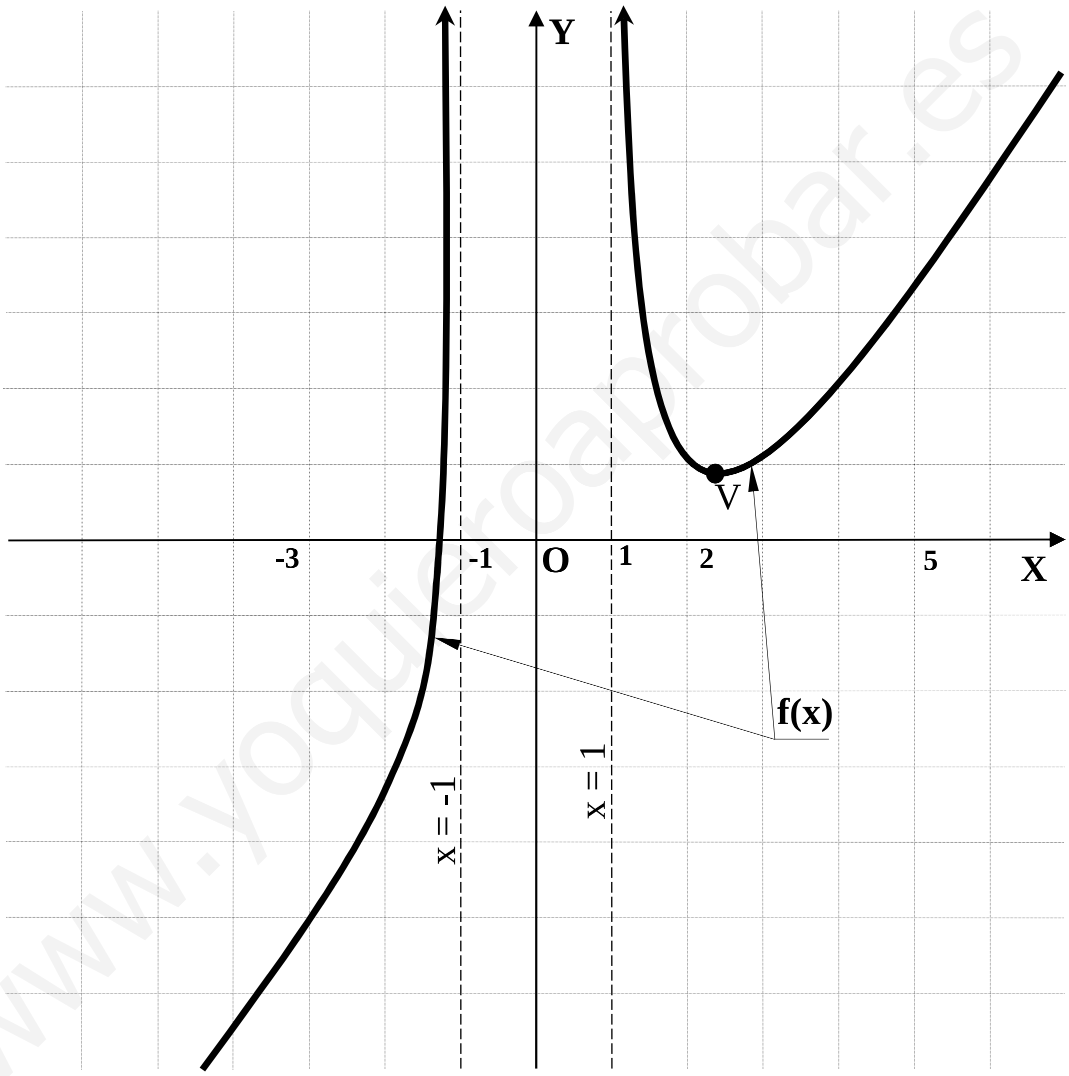
$$f\left(1+\sqrt{2}\right)=\left(1+\sqrt{2}\right)-L\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^2-1\right]=1+\sqrt{2}-L\left(1+2\sqrt{2}+2-1\right)=1+\sqrt{2}-L\left(2\sqrt{2}+2\right)\cong$$

$\cong 1+1'41-L(2'83+2)=2'41-L\,4'83=2'41-1'57=0'84 \Rightarrow$ $\underline{\underline{\textit{Mínimo}:\ A(2'41,\ 0'84)}}$.

Una función tiene un punto de inflexión para los valores que anulan la segunda derivada y hacen distinto de cero la tercera derivada.

$$f''(x)=\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2}=0 \Rightarrow 2x^2+2=0 \Rightarrow x\notin R \Rightarrow$$ $\underline{\underline{\text{f(x) no tiene puntos de inflexión.}}}$

La representación de f(x) con los datos obtenidos es, aproximadamente, la siguiente:



****

5º) Calcula la ecuación de una recta r paralela al plano que pasa por los puntos $A(1,\ 1,\ 0)$, B(0, 1, 1) y C(1, 0, 1) y al plano de ecuación $\pi \equiv x+2y+3z=1$ y que no esté contenida en ninguno de ellos.

Los puntos A(1, 1, 0), B(0, 1, 1), C(1, 0, 1) determinan los vectores:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{BA}=A-B=(1,\ 1,\ 0)-(0,\ 1,\ 1)=(1,\ 0,\ -1).$$

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{CA}=A-C=(1,\ 1,\ 0)-(1,\ 0,\ 1)=(0,\ 1,\ -1).$$

El plano α que contiene a los puntos A(1, 1, 0), B(0, 1, 1), C(1, 0, 1) es:

$$\alpha(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0\ ;;\ z+(x-1)+(y-1)=0\ ;;\ z+x-1+y-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha \equiv x+y+z-2=0}.$$

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_\alpha}=(1,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{n_\pi}=(1,\ 2,\ 3)$.

La recta r, por ser paralela a los dos planos, tiene como vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente de un vector $\overrightarrow{w}$ ortogonal a los vectores normales de los planos:

$$\overrightarrow{w} \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0\ ;;\ 3i+j+2k-k-2i-3j=i-2j+k=\underline{(1,\ -2,\ 1)=\overrightarrow{w}}.$$

Para determinar la ecuación de una de las infinitas rectas que cumplen las condiciones dadas, tomamos un punto P que no pertenezca a ninguno de los dos planos, por ejemplo: P(1, -2, 5):

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv x+y+z-2=0 \\ P(1,\ -2,\ 5) \end{array}\right\} \Rightarrow 1-2+5-2 \neq 0 \Rightarrow \underline{P \notin \alpha}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+2y+3z-1=0 \\ P(1,\ -2,\ 5) \end{array}\right\} \Rightarrow 1-4+15-1 \neq 0 \Rightarrow \underline{P \notin \pi}.$$

La recta r, expresada por unas ecuaciones continuas, por ejemplo, es la siguiente:

$$\underline{\underline{r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-5}{1}}}$$

****

PROPUESTA B

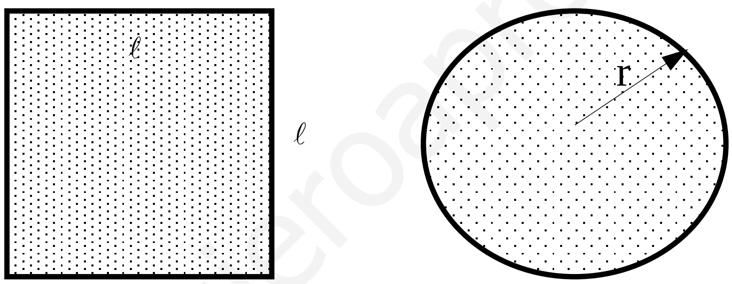
1º) Contesta razonadamente si, para la función $f(x)=L(x^2+3x)$ existe algún punto en el que la recta tangente a la gráfica de f(x) es perpendicular a la recta $2x-y+2=0$.

2º) Encuentra un vector de módulo 1 que sea ortogonal a los vectores de coordenadas (1, 0, 1) y (1, 2, 0).

3º) Halla una función f(x) que pase por el punto A(0, 1) y tal que $f'(x)=(x^2-4)\cdot e^x$.

(Resueltos en la propuesta A)

4º) Con una cuerda de 2 metros queremos construir un cuadrado de lado ℓ y un círculo de radio r de modo que la suma de sus áreas sea mínima. ¿Cuándo deben medir ℓ y r?



$$L=L_1+L_2=4\ell+2\pi r=2\ ;;\ \ell=\frac{2-2\pi r}{4}=\frac{1-\pi r}{2}=\underline{\frac{1}{2}(1-\pi r)=\ell}.$$

$$S=S_{Total}=S_{cuadrado}+S_{círculo}=\ell^2+\pi r^2=\left[\frac{1}{2}(1-\pi r)\right]^2+\pi r^2=\underline{\frac{1}{4}(1-\pi r)^2+\pi r^2=S}.$$

Para que el área sea mínima es condición necesaria que su derivada sea cero:

$$S'=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot(1-\pi r)\cdot(-\pi)+2\pi r=-\frac{1}{2}\pi\cdot(1-\pi r)+2\pi r=-\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi^2 r+2\pi r=\underline{\frac{\pi}{2}(\pi r+4r-1)=S'}.$$

$$S'=0\Rightarrow \pi r+4r-1=0\ ;;\ \pi r+4r=1\ ;;\ r(\pi+4)=1\ ;;\ \underline{r=\frac{1}{4+\pi}\cong 0'14\ metros}.$$

$$\ell=\frac{1}{2}(1-\pi r)=\frac{1}{2}\left(1-\pi\cdot\frac{1}{4+\pi}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4+\pi}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4+\pi-\pi}{4+\pi}=\underline{\frac{2}{4+\pi}=2r\cong 0'28\ metros=\ell}.$$

Justificación de que se trata de un mínimo:

$$S''=\frac{\pi}{2}(\pi+4)>0 \Rightarrow \underline{Mínimo,\ c.q.j.}$$

<u>El lado del cuadrado es de 0’28 metros y el radio de 0’14 metros.</u>

****

5º) La recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$ y la recta s que pasa por los puntos P(1, 0, 2) y $Q(a,\ 1,\ 0)$ se cortan en un punto. Calcular el valor de α y el punto de corte.

La recta que pasa por los puntos P(1, 0, 2) y Q(α, 1, 0) tiene como vector director $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (\alpha,\ 1,\ 0) - (1,\ 0,\ 2) = (\alpha - 1,\ 1,\ -2)$.

Las rectas r y s expresadas por unas ecuaciones paramétricas son $r \equiv \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = -4 + 2\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + (\alpha - 1)\mu \\ y = \mu \\ z = 2 - 2\mu \end{cases}$.

Por tener un punto en común tiene que cumplirse lo siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = -4 + 2\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 + (\alpha - 1)\mu \\ y = \mu \\ z = 2 - 2\mu \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3 + 2\lambda = 1 + (\alpha - 1)\mu \\ -4 + 2\lambda = \mu \\ 3 + 3\lambda = 2 - 2\mu \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2\lambda = 4 + (\alpha - 1)\mu \\ 2\lambda = \mu + 4 \\ 3\lambda = -1 - 2\mu \end{array} \right\} \Rightarrow$$

De las dos últimas ecuaciones se obtienen los valores de λ y μ:

$$\left. \begin{array}{r} 2\lambda - \mu = 4 \\ 3\lambda + 2\mu = -1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{r} 4\lambda - 2\mu = 8 \\ 3\lambda + 2\mu = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow 7\lambda = 7\ ;;\ \underline{\lambda = 1}\ ;;\ \underline{\mu = -2}.$$

Sustituyendo los valores hallados en la ecuación $2\lambda = 4 + (\alpha - 1)\mu$, resulta:

$$2 \cdot 1 = 4 + (\alpha - 1) \cdot (-2)\ ;;\ 2 = 4 - 2\alpha + 2\ ;;\ 2\alpha = 4\ ;;\ \underline{\underline{\alpha = 2}}.$$

<u>El punto de corte es P(-1, -2, 6).</u>

****