PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JULIO – 2012

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Encuentra un vector de módulo 1 que sea ortogonal a los vectores $\overrightarrow{u}=(1,\ 0,\ 1)$ y $\overrightarrow{v}=(2,\ 1,\ 0)$.

Un vector ortogonal a los vectores $\overrightarrow{u}=(1,\ 0,\ 1)$ y $\overrightarrow{v}=(2,\ 1,\ 0)$ es cualquiera que sea linealmente dependiente de su producto vectorial.

$$\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2j+k-i=-i+2j+k=\underline{(-1,\ 2,\ 1)=\overrightarrow{w}}.$$

Si un vector se divide por su módulo resulta un vector unitario de las mismas características del vector, que se llama "versor" del vector.

$\left|\overrightarrow{w}\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$. El vector pedido es el versor de $\overrightarrow{w}$, que es:

$$\underline{\underline{Versor\ \ de\ \ \overrightarrow{w}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{w'}=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)}}$$

****

2º) Calcula: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x\cos x - 1}{sen\ x - x + 1 - \cos x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x\cos x - 1}{sen\ x - x + 1 - \cos x} = \frac{e^0 - 0 \cdot 1 - 1}{0 - 0 + 1 - 1} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L\acute{}Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x - (1 \cdot \cos x - x \cdot sen\ x)}{\cos x - 1 + sen\ x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x + x \cdot sen\ x}{\cos x - 1 + sen\ x} = \frac{e^0 - 1 + 0}{1 - 1 + 0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L\acute{}Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x + sen\ x + 1 \cdot sen\ x + x \cdot \cos x}{-sen\ x + \cos x} = \frac{e^0 + 0 + 0 + 0 \cdot 1}{-0 + 1} = 1.$$

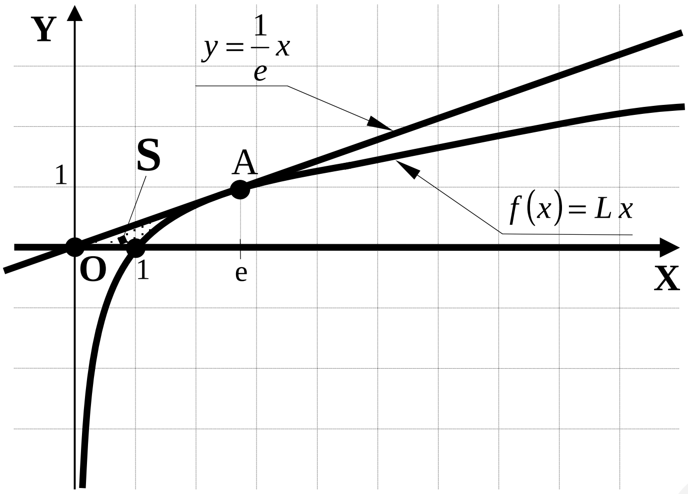
$$\underline{\underline{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x\cos x - 1}{sen\ x - x + 1 - \cos x} = 1}}$$

****

3º) Calcula el área de la región limitada por la función $f(x)=L\,x$, la recta tangente a f(x) en x = e y el eje de abscisas.

La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

$f'(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow m=f'(e)=\frac{1}{e}=m$. El punto de tangencia es: $f(e)=L\,e=1 \Rightarrow \underline{A(e,\ 1)}$.



La ecuación de una recta conocidos un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$.

Aplicada al caso que nos ocupa:

$$y-1=\frac{1}{e}(x-e)=\frac{1}{e}x-1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Recta tangente: $\underline{y=\frac{1}{e}x}$.

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.

De la observación de la figura se deduce que el área pedida S, es la siguiente:

$S=\int_0^e \frac{x}{e}\cdot dx-\int_1^e L\,x\cdot dx$. Resolvemos primero la integral indefinida $I=\int L\,x\cdot dx$:

$$I=\int L\,x\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} u=L\,x \rightarrow du=\frac{1}{x}\cdot dx \\ dx=dv \rightarrow v=x \end{array}\right\} \Rightarrow I=L\,x\cdot x-\int x\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=x\,L\,x-\int dx=$$

$$=x\,L\,x-x+C=\underline{x(L\,x-1)+C=I}.$$

$$S=\frac{1}{e}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^e-\left[x(L\,x-1)\right]_1^e=\left(\frac{1^2}{2}-1\cdot L1\right)=\frac{1}{e}\cdot\left(\frac{e^2}{2}-0\right)-\left[e(L\,e-1)-1\cdot(L1-1)\right]=$$

$$=\frac{e}{2}-\left[e\cdot(1-1)-(0-1)\right]=\frac{e}{2}-1=\underline{\underline{\frac{e-2}{2}\ u^2=S}}.$$

****

4º) Para $a \in (0, +\infty)$ determina el dominio y estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} 1+a^x & si \ x \le 0 \\ L(x^2+a) & si \ x>0 \end{cases}$. Describe la función derivada f'(x).

La expresión $1+a^x$ está definida $\forall a \in (0, +\infty)$ y para cualquier valor real de x y $a \in (0, +\infty)$ es $x^2+a>0$, por lo cual el dominio de la función es $\underline{\underline{D(f) \Rightarrow R}}$.

Para que la función $f(x)=\begin{cases} 1+a^x & si \ x \le 0 \\ L(x^2+a) & si \ x>0 \end{cases}$ sea derivable en R, es condición necesaria, que sea continua en R.

La función f(x) es continua para todo R, excepto para el valor x = 0, que es dudosa su continuidad. Para que la función sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para \ \ x=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (1+a^x) = f(0) = 1+1 = \underline{2} \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} [L(x^2+a)] = \underline{La} \end{array} \right\} \Rightarrow La = 2 \Rightarrow \underline{a=e^2}.$$

$$\underline{\underline{f(x)=\begin{cases} 1+a^x & si \ x \le 0 \\ L(x^2+a) & si \ x>0 \end{cases} \ es \ continua \ en \ R \ para \ a=e^2.}}$$

La función resulta $f(x)=\begin{cases} 1+e^{2x} & si \ x \le 0 \\ L(x^2+e^2) & si \ x>0 \end{cases}$.

La función f(x) es derivable para todo R, excepto para el valor x = 0, que es dudosa su derivabilidad. Para que la función sea derivable para x = 0 tiene que ser derivable por la izquierda y por la derecha y ser ambas derivadas iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} 2e^{2x} & si \ x \le 0 \\ \dfrac{2x}{x^2+e^2} & si \ x>0 \end{cases} \Rightarrow f'(0)=\begin{cases} 2 & si \ x \le 0 \\ 0 & si \ x>0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) \ no \ es \ derivable \ para \ x=0.}}$$

****

5º) Discute y resuelve, según los valores de α, el sistema $\begin{cases} x+(1+a)y-az=2a \\ x+2y-z=2 \\ x+ay+(1+a)z=1 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1+a & -a \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & a & 1+a \end{pmatrix} \quad y \quad M'=\begin{pmatrix} 1 & 1+a & -a & 2a \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & a & 1+a & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1+a & -a \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & a & 1+a \end{vmatrix}=2(1+a)-a^2-(1+a)+2a+a-(1+a)^2=(1+a)-a^2+3a-(1+a)^2=$$

$$=1+a-a^2+3a-(1+2a+a^2)=1+4a-a^2-1-2a-a^2=-2a^2+2a=-2a(a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a_1=0 \\ \underline{a_2=1} \end{cases}.$$

$$\underline{\underline{Para \ \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango \ M = Rango \ M'=3=n^o \ incóg. \Rightarrow Compatible \ \det er\min ado}}$$

$$Para \ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango \ M' \Rightarrow \{C_1, \ C_2, \ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=2+2-1=3\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \ M'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para \ a=0 \Rightarrow Rango \ M=2 \ ;; \ Rango \ M'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

$$Para \ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_2\} \Rightarrow \underline{Rango \ de \ M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para \ a=1 \Rightarrow Rango \ M = Rango \ M'=2<n^o \ incóg. \Rightarrow Compatible \ in\det er\min ado}}$$

Resolvemos en primer lugar el sistema en el caso de compatible determinado, aplicando la regla de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2a & 1+a & -a\\ 2 & 2 & -1\\ 1 & a & 1+a\end{vmatrix}}{-2a(a-1)}=\frac{4a(1+a)-2a^2-(1+a)+2a+2a^2-2(1+a)^2}{-2a(a-1)}=$$

$$=\frac{4a+4a^2-1-a+2a-2(1+2a+a^2)}{-2a(a-1)}=\frac{5a+4a^2-1-2-4a-2a^2}{-2a(a-1)}=\frac{2a^2+a-3}{-2a(a-1)}=\frac{(a-1)(2a+3)}{-2a(a-1)}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{2a+3}{-2a}}}=x\,.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2a & -a\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1+a\end{vmatrix}}{-2a(a-1)}=\frac{2(1+a)-a-2a+2a+1-2a(1+a)}{-2a(a-1)}=\frac{2+2a-a+1-2a-2a^2}{-2a(a-1)}=$$

$$=\frac{3-a-2a^2}{-2a(a-1)}=\frac{-(2a^2+a-3)}{-2a(a-1)}=\frac{-(a-1)(2a+3)}{-2a(a-1)}=\underline{\underline{\frac{2a+3}{2a}}}=y\,.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1+a & 2a\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & a & 1\end{vmatrix}}{-2a(a-1)}=\frac{2+2a^2+2(1+a)-4a-2a-(1+a)}{-2a(a-1)}=\frac{2+2a^2+(1+a)-6a}{-2a(a-1)}=$$

$$=\frac{2+2a^2+1-5a}{-2a(a-1)}=\frac{2a^2-5a+3}{-2a(a-1)}=\frac{(a-1)(2a-3)}{-2a(a-1)}=\underline{\underline{\frac{2a-3}{-2a}}}=z\,.$$

Resolvemos ahora para α = 1 en cuyo caso el sistema es $\begin{cases}x+2y-z=2\\ x+2y-z=2\\ x+y+2z=1\end{cases}$, equivalente al sistema $\begin{cases}x+2y-z=2\\ x+y+2z=1\end{cases}$, que es compatible indeterminado. Haciendo $\underline{z=\lambda}$:

$$\left.\begin{aligned}x+2y&=2+\lambda\\ x+y&=1-2\lambda\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}x+2y&=2+\lambda\\ -x-y&=-1+2\lambda\end{aligned}\right\}\Rightarrow \underline{y=1+3\lambda}\ \ ;;\ \ x=1-2\lambda-y=1-2\lambda-1-3\lambda=\underline{-5\lambda=x}\,.$$

$$\underline{\underline{\textit{Solución}:\ \begin{cases}x=-5\lambda\\ y=1+3\lambda,\ \ \forall\lambda\in R\\ z=\lambda\end{cases}}}$$

****

PROPUESTA B

1º) Encuentra un vector de módulo 1 que sea ortogonal a los vectores $\vec{u} = (1,\ 0,\ 1)$ y $\vec{v} = (2,\ 1,\ 0)$.

2º) Calcula: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x\cos x - 1}{sen\ x - x + 1 - \cos x}$.

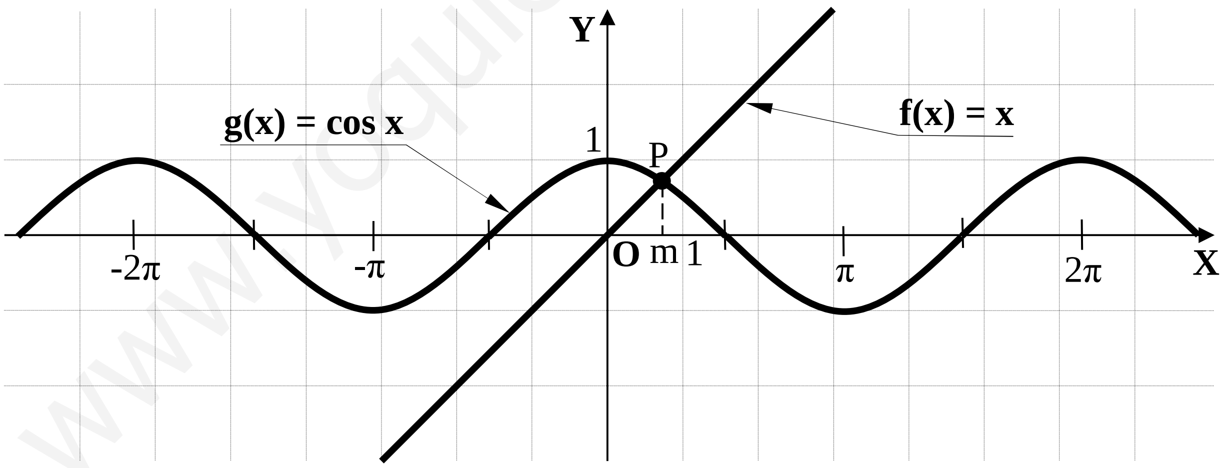
3º) Calcula el área de la región limitada por la función $f(x) = Lx$, la recta tangente a f(x) en x = e y el eje de abscisas.

(Resueltos en la Propuesta A)

4º) Enuncia el teorema de Bolzano y úsalo para probar que la ecuación $x = \cos x$ tiene una solución. Debes justificar adecuadamente por qué es única. (Puede serte útil dibujar las gráficas de las funciones f(x) = x y g(x) = cos x).

El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma: "Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$".

Haciendo uso de la recomendación, se representan gráficamente las funciones f(x) = x y g(x) = cos x:



Como se observa, el punto de corte es único, lo que implica que lo es la solución, como se nos pide demostrar justificadamente.

Sea la función $h(x) = f(x) - g(x) = x - \cos x$, que es continua en R pos ser la suma de dos funciones continuas en R, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo finito considerado.

Se trata de encontrar dos valores finitos de x, α y b, tales que: f(α) < 0 y f(b) > 0:

Por ejemplo (utilizamos la gráfica de las funciones):

$$f(0)=0-\cos\ 0=-1<0\ \ ;;\ \ f(\pi)=\pi-\cos\ \pi=\pi-(-1)=\pi+2>0$$

Según el teorema de Bolzano, se puede afirmar que la función f(x) = x – cos x tiene al menos un punto de corte con el eje OX en el intervalo $(0,\ \pi)$ y, como consecuencia, la ecuación x = cos x tiene al menos una solución en el intervalo $(0,\ \pi)$. La solución única es x = m, como se observa en la figura.

Vamos a demostrar ahora que la solución es única.

El teorema de Rolle dice que: "Si h(x) es una función continua en el intervalo $[a,\ b]$ y derivable en $(a,\ b)$ y si se cumple que h(a) = h(b), existe al menos un punto $c\in(a,\ b)$ tal que h'(c) = 0".

Por otra parte $h'(x)=1+sen\ x=0\ \Rightarrow\ sen\ x=-1\ \Rightarrow\ \underline{x=2k\pi-\frac{\pi}{2},\ \forall k\in Z}$.

Teniendo en cuenta que el recorrido de g(x) es $[-1,\ 1]$, y que f(x) = x, todas las posibles raíces de h(x) tendrían que estar en este intervalo.

Si la función h(x) tuviese otra raíz real σ tal que, por ejemplo, -1 < σ < m < 1, se tendría que cumplir que $h(\sigma)=h(m)=0$, con lo cual se le podría aplicar el teorema de Rolle a h(x) en el intervalo [σ, m], perteneciente al intervalo $[-1,\ 1]$, lo que implicaría que existiría un valor $c\in(\sigma,\ m)$ tal que $h'(c)=0$ y esto vamos a demostrar que es imposible, puesto que las soluciones de $h'(x)$ son de la forma $x=2k\pi-\frac{\pi}{2},\ \forall k\in Z$, que no pertenecen al intervalo $[-1,\ 1]$.

<u>Lo anterior demuestra que la solución de la ecuación x = cos x es única.</u>

****

5º) Para los puntos A(1, 0, 2) y B(-1, 2, 4) y la recta r de ecuación $r \equiv \frac{x+2}{2} = y-1 = \frac{z-1}{3}$:

a) Calcula la ecuación del plano π formado por los puntos que equidistan (están a la misma distancia) de A y B.

b) Calcula la ecuación del plano π' paralelo a r y que pase por A y B.

c) Encuentra otro plano π'' de modo que la intersección de π, π' y π'' sea exactamente un punto.

----

a)

El punto medio de A(1, 0, 2) y B(-1, 2, 4) es M(0, 1, 3).

Los puntos A(1, 0, 2) y B(-1, 2, 4) determinan el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA} = (2,\ -2,\ -2)$.

El plano pedido π es el que tiene como vector normal a cualquiera que sea linealmente dependiente de $\overrightarrow{u} = (2,\ -2,\ -2)$ y contiene al punto M(0, 1, 3).

La expresión general de π es de la forma $\pi \equiv x - y - z + D = 0$. Como contiene al punto M tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - y - z + D = 0 \\ M(0,\ 1,\ 3) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 - 1 - 3 + D = 0 \ ;; \ \underline{D = 4}.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x - y - z + 4 = 0}}$$

b)

El plano π', por ser paralelo a r tiene como vector director el vector director de r, que es $\overrightarrow{v} = (2,\ 1,\ 3)$ y por pasar por A y B tiene como vector director a $\overrightarrow{u} = (2,\ -2,\ -2)$.

La ecuación general de π' es la siguiente: $\pi'(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$;;

$$-6(x-1) - 4y + 2(z-2) + 4(z-2) + 2(x-1) - 6y = 0 \ ;; \ -4(x-1) - 10y + 6(z-2) = 0 \ ;;$$

$$2(x-1) + 5y - 3(z-2) = 0 \ ;; \ 2x - 2 + 5y - 3z + 6 = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi' \equiv 2x + 5y - 3z + 4 = 0}}$$

c)

Los planos $\pi \equiv x - y - z + 4 = 0$ y $\pi' \equiv 2x + 5y - 3z + 4 = 0$, por ser sus vectores normales linealmente independientes, son secantes.

Tres planos se cortan en un punto cuando el sistema que forman es compatible determinado, o sea, que la matriz de coeficientes sea regular (determinante distinto de cero). Existen infinitos planos que con π y π' determinan un sistema compatible determinado; vamos a tomar, por ejemplo, el plano $\pi'' \equiv x = 0$.

La matriz de coeficientes del sistema que forman es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo determinante es $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 + 5 = 8 \neq 0$.

$$\underline{\underline{\pi'' \equiv x = 0}}$$

****