PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2013

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Dibuja dos vectores y el vector diferencia de ambos. Calcula el ángulo que forman dos vectores distintos $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ que tienen el mismo módulo que el vector diferencia de ambos $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$. (Puede serte útil el dibujo previo)

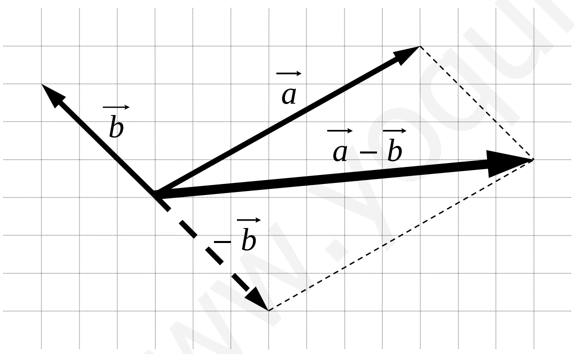
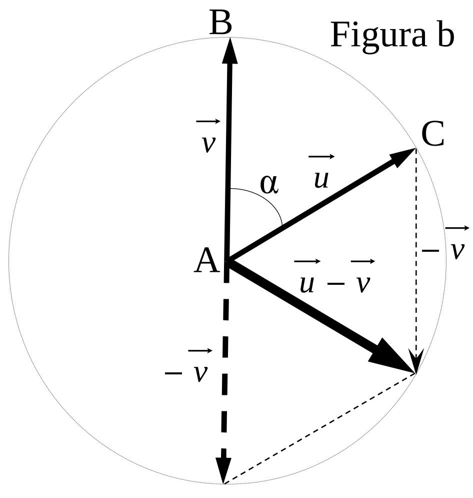


Figura α



La figura α representa la contestación de la primera parte del ejercicio.

En la figura b se refleja la segunda parte del ejercicio. El triángulo ABC es equilátero, por lo cual, los vectores forman un ángulo de 60º.

****

2º) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 y con determinante $|A| = 2$. Calcula los determinantes de la matriz 2 · A, la inversa A^{-1} y la traspuesta A^t.

Sabiendo que el producto de una matriz por un número real es la matriz que resulta de multiplicar todos y cada uno de los elementos de la matriz por ese número y que, si se multiplican los elementos de una línea de un determinante por un número real el valor del determinante queda multiplicado por dicho número:

$$|2 \cdot A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot 2 = 16 \Rightarrow \underline{\underline{|2 \cdot A| = 16}}.$$

Sabiendo que $A^{-1} = \frac{1}{A} \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{|A^{-1}| = \frac{1}{2}}}$.

El valor del determinante de una matriz traspuesta es igual que el valor del determinante de la matriz: $\underline{\underline{|A^t| = |A| = 2}}$.

****

3º) Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(e^x-1)^2}{e^{x^2}-1} & si\ \ x\neq 0 \\ \alpha & si\ \ x=0 \end{cases}$, dependiendo de los valores de α.

La función f(x) es continua para todo R, excepto para el valor x = 0, que es dudosa su continuidad. Para que la función sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para\ \ x=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)^2}{e^{x^2}-1}=\underline{1}\quad (*) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} \alpha = f(0)=\underline{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{a=1}.$$

$$(*)\qquad \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2}{e^{x^2}-1}=\frac{(e^0-1)^2}{e^0-1}=\frac{(1-1)^2}{1-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\ \Rightarrow \{L´Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot(e^x-1)\cdot e^x}{2x\cdot e^{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to 0}=\frac{(e^x-1)\cdot e^x}{x\cdot e^{x^2}}=\frac{(e^0-1)\cdot e^0}{0\cdot e^0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\ \Rightarrow \{L´Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}=\frac{e^{2x}\ \cdot e^x+(e^x-1)\cdot e^x}{1\cdot e^{x^2}+x\ \cdot 2x\cdot e^{x^2}}=$$

$$=\frac{e^0\ \cdot e^0+(e^0-1)\cdot e^0}{1\cdot e^0+0\cdot 0\cdot e^0}=\frac{1\cdot 1+(1-1)\cdot 1}{1\cdot 1+0}=\frac{1+0}{1+0}=1.$$

<u>La función es continua en toda la recta real para α = 1.</u>

****

4º) a)Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange.

b) Para la función $f(x)=\begin{cases} x \cdot sen\ x & si\ \ x \le \pi \\ \alpha \cdot \cos x + b & si\ \ x > \pi \end{cases}$:

i) Estudia la derivabilidad de f(x) en función de α y b; expresa la función derivada f'(x) donde exista.

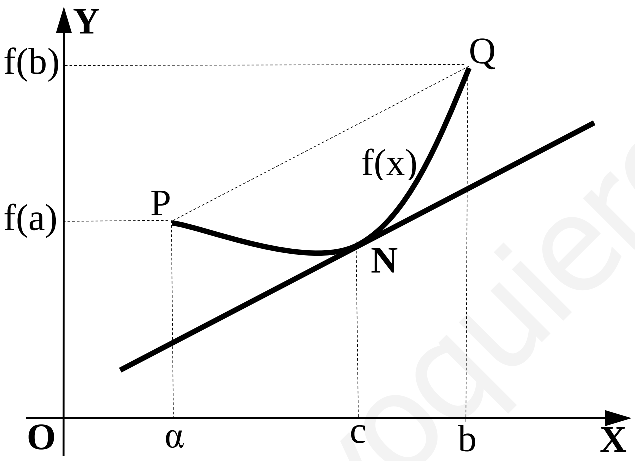
ii) Calcula el área que determina la función f(x) en el intervalo $[0,\ \pi]$.

----

a)

El Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial, también conocido como Teorema de Lagrange, se puede enunciar del modo siguiente:

"Si f(x) es una función continua en el intervalo [α, b] y derivable en (α, b), entonces, existe al menos un punto $c \in (a,\ b)$ que cumple: $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$".



La interpretación geométrica puede apreciarse más fácilmente mediante la figura adjunta.

Considerada la función f(x), continua en [α, b] y derivable en (α, b) existe, por lo menos un punto N perteneciente al intervalo (α, b) en el que la recta tangente a la gráfica f(x) es paralela a la cuerda que une los puntos P y Q de coordenadas $P[a,\ \ f(a)]\ \ y\ \ Q[b,\ \ f(b)]$.

b)

i) Independientemente de los valores reales de α y b, la función f(x) está definida para cualquier valor real de x.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto. El punto que ofrece duda de continuidad y derivabilidad es para x = π.

En primer lugar determinamos los valores de α y b para que la función sea continua en x = π:

$$Para\ \ x=\pi \Rightarrow \left. \begin{cases} \lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi} (x \cdot sen\ x) = f(\pi) = \pi \cdot 0 = \underline{0} \\ \lim\limits_{x \to \pi^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi} (a \cdot \cos x + b) = \underline{-a+b} \end{cases} \right\} \Rightarrow \underline{a=b}.$$

La función es continua en R para α = b.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas laterales existen y son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} sen\ x+x\cos\ x & si\ \ x\le\pi \\ -\alpha\cdot sen\ x & si\ \ x>\pi \end{cases} \Rightarrow\ f'(\pi)=\begin{cases} sen\ \pi+\pi\cos\ \pi=-\pi & si\ \ x\le\pi \\ -\alpha\cdot sen\ \pi=0 & si\ \ x>\pi \end{cases} \Rightarrow$$

La función f(x) no es derivable para x = π.

ii)

El valor del área pedida es la siguiente: $S=\int_0^{\pi} x\cdot sen\ x\cdot dx$.

En primer lugar determinamos el valor de la integral indefinida $I=\int x\cdot sen\ x\cdot dx$ por el método de integración por partes:

$$I=\int x\cdot sen\ x\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=u\ \rightarrow\ dx=du \\ sen\ x\cdot dx=dv\rightarrow v=-\cos\ x \end{matrix}\right\} \Rightarrow I=x\cdot(-\cos\ x)-\int -\cos\ x\cdot dx=$$

$$=-x\ \cos\ x+\int \cos\ x\cdot dx=\underline{-x\ \cos\ x+sen\ x}.$$

$$S=\int_0^{\pi} x\cdot sen\ x\cdot dx=\left[-x\ \cos\ x-sen\ x\right]_0^{\pi}=(-\pi\ \cos\ \pi-sen\ \pi)-(-0\cdot\cos\ 0-sen\ 0)=$$

$$=\pi-0-0=\pi\ .$$

$$\underline{\underline{S=\pi\ u^2}}$$

****

5º) Encuentra el valor de $0 \neq \alpha$ para que las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-5z=-3 \\ -2x+z=1 \end{cases}$ y $s \equiv x+1=\frac{y-3}{a}=\frac{x}{2}$ sean paralelas. Para el valor de α que has encontrado, calcula la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1}=(1,\ 1,\ -5)$ y $\overrightarrow{n_2}=(-2,\ 0,\ 1)$.

$$\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=i+10j+2k-j=i+9j+2k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r}=(1,\ 9,\ 2)}.$$

Un vector director de la recta s es $\overrightarrow{v_s}=(1,\ a,\ 2)$.

Para que las rectas r y s sean paralelas en condición necesaria que sus vectores directores sean linealmente dependientes, o sea, que sus componentes sean directamente proporcionales:

$$\frac{1}{1}=\frac{9}{a}=\frac{2}{2} \Rightarrow \underline{a=9}.$$ Las rectas r y s son paralelas para α = 9.

Un punto de la recta s es A(-1, 3, 0).

Para encontrar un punto de la recta r la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-5z=-3 \\ -2x+z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=\lambda}\ ;;\ \underline{z=1+2\lambda}\ ;;\ y=-3-x+5z=-3-\lambda+5+10\lambda=\underline{2+9\lambda=y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2+9\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$ Un punto de r es B(0, 2, 1).

Los puntos A(-1, 3, 0) y B(0, 2, 1) determinan el siguiente vector:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(0,\ 2,\ 1)-(-1,\ 3,\ 0)=(1,\ -1,\ 1).$$

La expresión general del plano π que contiene a las rectas r y s es la siguiente:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v_r}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \end{vmatrix}=0\ ;;\ -2(x+1)+(y-3)+9z+z-9(x+1)-2(y-3)=0\ ;;$$

$-11(x+1)-(y-3)+10z=0$;; $11(x+1)+(y-3)-10z=0$;; $11x+11+y-3-10z=0$.

$$\underline{\underline{\pi \equiv 11x+y-10z+8=0}}$$

****

PROPUESTA B

1º) Dibuja dos vectores y el vector diferencia de ambos. Calcula el ángulo que forman dos vectores distintos $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ que tienen el mismo módulo que el vector diferencia de ambos $\vec{u}-\vec{v}$. (Puede serte útil el dibujo previo)

2º) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 y con determinante $|A|=2$. Calcula los determinantes de la matriz 2ª, la inversa A^{-1} y la traspuesta A^t.

3º) Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(e^x-1)^2}{e^{x^2}-1} & si\ \ x\neq 0 \\ \alpha & si\ \ x=0 \end{cases}$, dependiendo de los valores de α.

(RESUELTOS EN LA PROPUESTA A)

4º) Calcula el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento, máximos y mínimos y los puntos de inflexión de la función $f(x)=x\cdot e^x$. Con los datos obtenidos, haz una representación gráfica aproximada de f(x).

El dominio de f(x) es R.

Las asíntotas horizontales son los valores finitos que toma la función cuando x tiene a más infinito o menos infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^x\right)=\infty\cdot\infty=\underline{\underline{\infty}}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x\cdot e^x\right)=-\infty\cdot e^{-\infty}=\frac{-\infty}{e^{\infty}}=-\frac{\infty}{\infty}\ \Rightarrow\ Indet.\ \Rightarrow\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ L'Hopital\ \Rightarrow\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\left(-e^x\right)=-\lim_{x\to-\infty}e^x=-e^{-\infty}=\underline{\underline{0}}.$$

El eje –X es asíntota horizontal de la función.

No tiene asíntotas verticales ni oblicuas.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x=e^x(1+x)\ ;;\ f'(x)=0\ \Rightarrow\ e^x(1+x)=0\ ;;\ 1+x=0\ ;;\ \underline{x=-1}.$$

$$f'(x)<0\ \Rightarrow\ x<-1\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Creciente\ \ (-\infty,\ -1)}}$$

$$f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; x > -1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Decreciente\;\; (-1,\; +\infty)}}$$

Teniendo en cuenta que f(x) es continua en su dominio y de la observación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento, se deduce que para x = -1 la función tiene un mínimo (que es mínimo absoluto), como justificamos a continuación.

$$f''(x) = e^x \cdot (1+x) + e^x \cdot 1 = e^x (2+x) \;;;\; f''(-1) = e^{-1}(2-1) = \frac{1}{e} > 0 \;\Rightarrow\; \underline{Mínimo,\; c.q.j.}$$

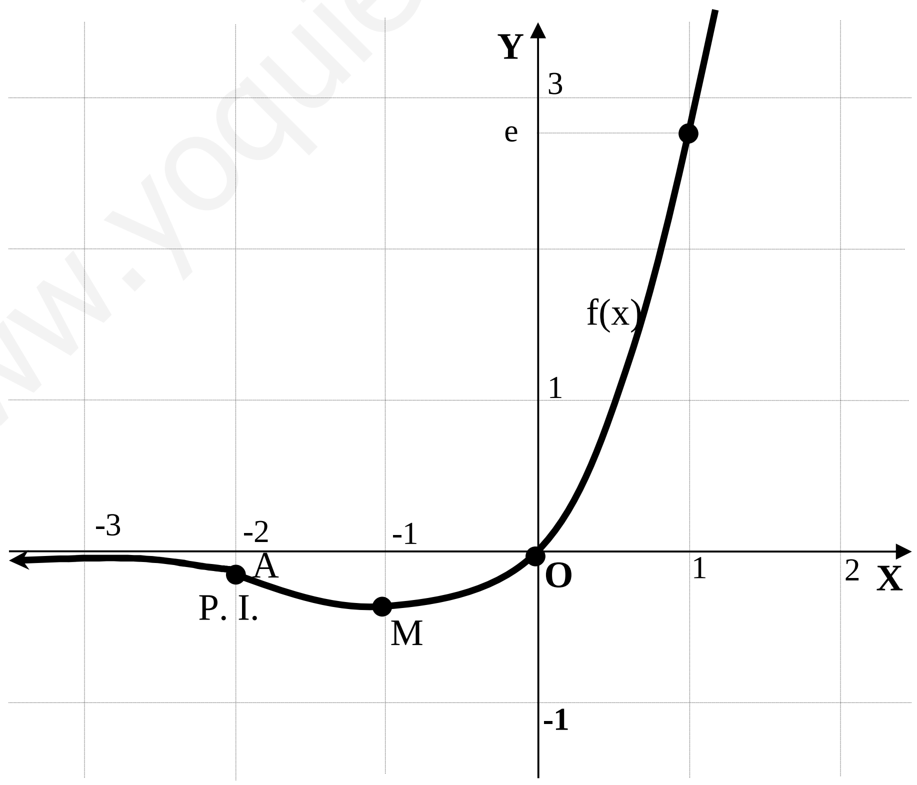
$$f(-1) = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Mínimo:\; M\left(-1,\; -\frac{1}{e}\right)}}.$$

Una función es convexa $(\cup)$ cuando la segunda derivada de la función es positiva y es cóncava $(\cap)$ cuando la segunda derivada es negativa.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2 + x = 0 \;;;\; \underline{x = -2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x > -2 \rightarrow f''(x) > 0 \;\Rightarrow\; \underline{Concava: (-2,\, \infty)\;\; (\cap)} \\ x < -2 \rightarrow f''(x) < 0 \;\Rightarrow\; \underline{Convexa: (-\infty,\, -2)\;\; (\cup)} \end{cases}.$$

Una función tiene un punto de inflexión cuando se anula la segunda derivada y para los valores que la anulan, es distinta de cero la tercera derivada.

$$f'''(x) = e^x \cdot (3+x) \Rightarrow f'''(-2) = e^{-2} \neq 0 \Rightarrow f(-2) = -2 \cdot e^{-2} = -\frac{2}{e^2} \Rightarrow \underline{\underline{P.\,I. \rightarrow A\left(-2,\; -\frac{2}{e^2}\right)}}.$$



Para x = 0, y = 0, lo que indica que la función pasa por el origen de coordenadas.

Para la representación gráfica formamos una tabla de valores que nos facilite su ejecución:

x	0	-1	-2	1	2
f(x)	0	$-\frac{1}{e}$	$-\frac{2}{e^2}$	e	$2e^2$
		Mín	P. I.		

La representación gráfica, aproximada, es la que indica la figura adjunta.

****

5º) Discute el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}(a-3)y+4z=2\\ y-2z=-1\\ ax-y+2z=a\end{cases}$, según los valores del parámetro α y resuelve cuando sea compatible determinado.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}0 & a-3 & 4\\ 0 & 1 & -2\\ a & -1 & 2\end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix}0 & a-3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ a & -1 & 2 & a\end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix}0 & a-3 & 4\\ 0 & 1 & -2\\ a & -1 & 2\end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix}a-3 & 4\\ 1 & -2\end{vmatrix}=a\cdot[-2(a-3)-4]=a(-2a+6-4)=a(2-2a)=$$

$$=2a(1-a) \Rightarrow \underline{a_1=0} \;;;\; \underline{a_2=1}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\begin{Bmatrix}a\neq 0\\ a\neq 1\end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\;\; M=Rango\;\; M'=3=n^o\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; determinado}}$$

$$Para\;\; a=0 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix}0 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 2 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}-3 & 4 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=4+4-4-6=-2\neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Rango\;\; M'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\;\; a=0 \Rightarrow Rango\; M=2 \;;;\; Rango\; M'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

$$Para\;\; a=1 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix}0 & -2 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2+C_3=C_4\} \Rightarrow \underline{Rango\;\; de\;\; M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\;\; a=1 \Rightarrow Rango\; M=Rango\; M'=2<n^o\;\; incog. \Rightarrow Compatible\;\; indeterminado}}$$

Resolvemos por la regla de Cramer en el caso de compatible determinado:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & a-3 & 4\\ -1 & 1 & -2\\ a & -1 & 2\end{vmatrix}}{2a(1-a)}=\frac{4+4-2a(a-3)-4a-4+2(a-3)}{2a(1-a)}=\frac{4-2a^2+6a-4a+2a-6}{2a(1-a)}=$$

$$=\frac{-2a^2+4a-2}{2a(1-a)}=-\frac{a^2-2a+1}{a(1-a)}=\frac{(a-1)^2}{a(a-1)}=\underline{\underline{\frac{a-1}{a}=x}}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}0 & 2 & 4\\ 0 & -1 & -2\\ a & a & 2\end{vmatrix}}{2a(a-5)}=\frac{-4a+4a}{2a(a-5)}=\underline{\underline{0=y}}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}0 & a-3 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ a & -1 & a\end{vmatrix}}{2a(a-5)}=\frac{a(a-3)-2a}{2a(a-5)}=\frac{a^2-3a-2a}{2a(a-5)}=\frac{a^2-5a}{2a(a-5)}=\frac{a(a-5)}{2a(a-5)}=\underline{\underline{\frac{1}{2}=z}}.$$

****