PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2014

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Sea $f(x)=\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$. a) Calcula, si existe $\lim_{x \to 1} f(x)$. b) Halla $\int f(x) \cdot dx$.

----

a) Primer procedimiento:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{-1}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 1} \left(2\sqrt{x}\right) = \underline{\underline{2}}.$$

Segundo procedimiento:

$\lim_{x \to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow In\det. \Rightarrow$ Multiplicando numerador y denominador por la conjugada del denominador:

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{(1-x)\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{(1-x)\left(1+\sqrt{x}\right)}{1-x} = \lim_{x \to 1} \left(1+\sqrt{x}\right) = 1+1 = \underline{\underline{2}}.$$

b)

$$\int f(x) \cdot dx = \int \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} \cdot dx = \int \left(1+\sqrt{x}\right) \cdot dx = x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = x + \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C = \underline{\underline{\frac{x}{3}\left(3+2\sqrt{x}\right)+C}}.$$

****

2º) a) Determina los valores de α que cumplen la ecuación $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 2 & a \end{vmatrix} = 0$.

b) Halla un punto de la recta $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ que no sea coplanario con los puntos A(2, 1, 4), B(1, 2, 2) y C (1, 1, 2).

----

a)

$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 2 & a \end{vmatrix} = 0$;; $a^3 + 2 + 4 - 4a - 2a - a = 0$;; $a^3 - 7a + 6 = 0$. Resolviendo por Ruffini:

	1	0	-7	6
1		1	1	-6
	1	1	-6	$\boxed{0}$
2		2	6	
	1	3	$\boxed{0}$	
-3		-3		
	1	$\boxed{0}$		

Solución: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = -3$.

b)

Los puntos A, B y C determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA} = A - B = (2,\ 1,\ 4) - (1,\ 2,\ 2) = (1,\ -1,\ 2)$.

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CA} = A - C = (2,\ 1,\ 4) - (1,\ 1,\ 2) = (1,\ 0,\ 2)$.

Los puntos A, B y C determinan el plano $\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$;;

$-2(x-2) + 2(y-2) + (z-4) - 2(y-1) = 0$;; $-2(x-2) + (z-4) = 0$;; $-2x + 4 + z - 4 \Rightarrow \underline{\pi \equiv 2x - z = 0}$.

Los puntos genéricos de la recta r son de la forma Q(x, 0, 0).

El punto de intersección de la recta r y el plano π es el origen O(0, 0, 0).

La solución es cualquier punto de la forma Q(x, 0, 0) con x ≠ 0.

****

3º) Sea $g(x)=\frac{1-Lx}{x}$. a) Determina el dominio de g. b) Halla sus asíntotas.

c) Determina los extremos relativos y estudia la monotonía de g.

d) Dibuja la gráfica de g destacando los elementos hallados anteriormente.

----

a)

Teniendo en cuenta que solamente tienen logaritmo los números positivos, el dominio de g es: $\underline{\underline{D(g)\Rightarrow(0,\ +\infty)}}$.

b)

Horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-Lx}{x}=\frac{-\infty}{\infty}\Rightarrow In\det.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{1}=-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=-0\Rightarrow$ La recta y = 0 (Eje X^+) es asíntota horizontal.

Verticales: $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-Lx}{x}=\frac{-(-\infty)}{0^+}=\underline{+\infty}\Rightarrow$ La recta x = 0 (Eje Y^+) es asíntota vertical de la función.

Oblicuas: No tiene. (las asíntotas oblicuas y horizontales son incompatibles).

c)

$$g'(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x-(1-Lx)\cdot 1}{x^2}=\frac{-1-1+Lx}{x^2}=\underline{\frac{Lx-2}{x^2}}.$$

$$g'(x)=0\Rightarrow\frac{Lx-2}{x^2}=0\ ;;\ Lx-2=0\ ;;\ Lx=2\rightarrow \underline{x=e^2}\ .$$

$$g''(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-(Lx-2)\cdot 2x}{x^4}=\frac{1-2Lx+4}{x^3}=\underline{\frac{5-2Lx}{x^3}}.$$

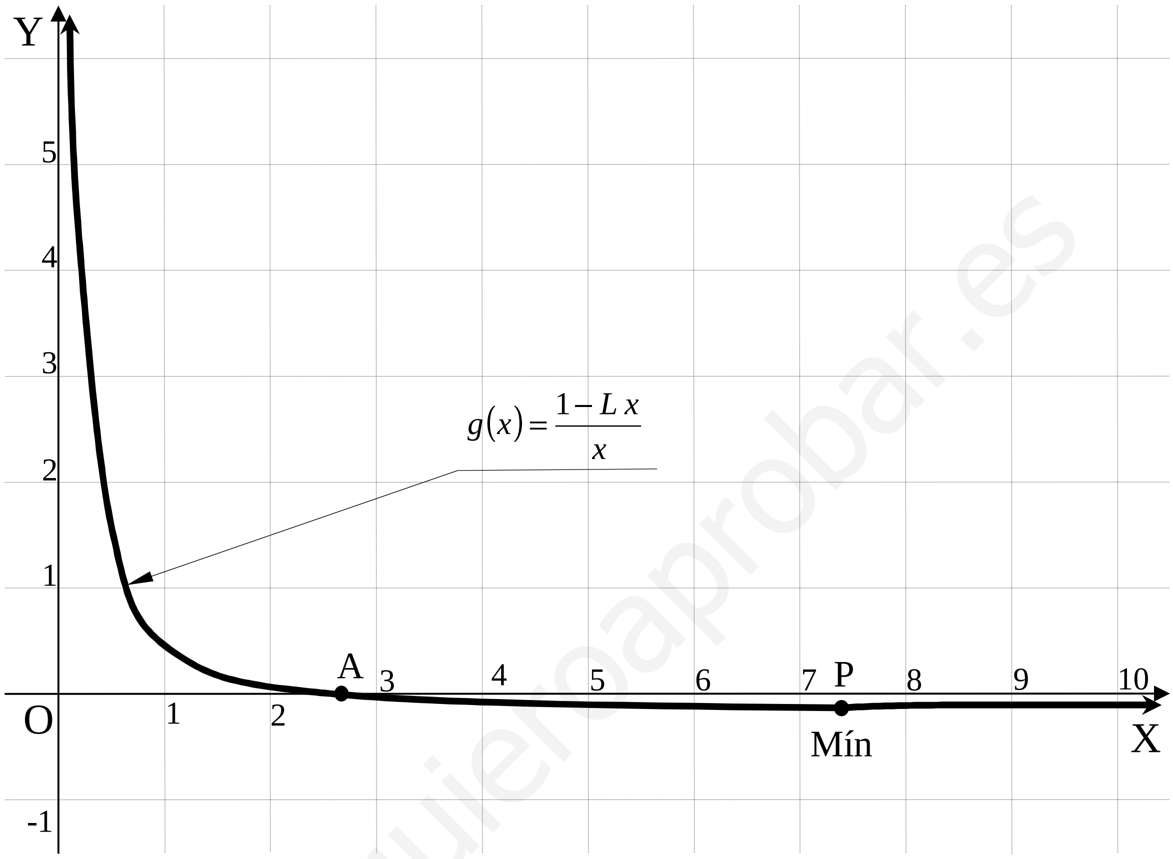
$$g''(e^2)=\frac{5-2Le^2}{(e^2)^3}=\frac{5-4Le}{e^6}=\frac{5-4}{e^6}=\frac{1}{e^6}>0\Rightarrow \text{Mínimo relativo para } x=e^2.$$

$$g(e^2)=\frac{1-Le^2}{e^2}=\frac{1-2}{e^2}=-\frac{1}{e^2}\Rightarrow \underline{\underline{Mínimo:\ P\left(e^2,\ -\frac{1}{e^2}\right)}}.$$

Teniendo en cuenta que la función g es continua en su domino y que el único extremo relativo que tiene es el mínimo obtenido, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes: $\underline{\underline{Decrecimiento: (0,\ e^2)\ ;;\ Crecimiento: (e^2,\ +\infty)}}$.

d)

Considerando que la función corta al eje X en el punto A(e, 0) y con los elementos hallados anteriormente puede obtenerse la representación gráfica aproximada de la función, que es la que indica la figura siguiente.



A modo de ampliación se determina el punto de inflexión de la función.

$$g''(x)=0 \Rightarrow \frac{5-2Lx}{x^3}=0\ ;;\ 5-2Lx=0\ ;;\ 5=2Lx \rightarrow \underline{x=\sqrt{e^5}=e^2\sqrt{e}}\ .$$

$$g\left(e^2\sqrt{e}\right)=\frac{1-Le^2\sqrt{e}}{\left(e^2\sqrt{e}\right)^2}=\frac{1-\frac{5}{2}}{e^5}=-\frac{3}{2e^5} \Rightarrow \underline{P.I.:\ Q\left(e^2\sqrt{e},\ -\frac{3}{2e^5}\right)}.$$

****

4º) Consideremos los puntos A(2, 6, -3) y B(3, 3, -2).

a) Halla una ecuación para la recta r que contiene a los puntos A y B.

b) Determina una ecuación para el plano π de los puntos que están a la misma distancia de A y de B.

c) Halla el punto de intersección de la recta r con el plano $\beta \equiv x = 0$.

----

a)

Los puntos A(2, 6, -3) y B(3, 3, -2) determinan el vector:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,\ 3,\ -2) - (2,\ 6,\ -3) = (1,\ -3,\ 1).$$

La expresión de r por unas ecuaciones continuas es: $\underline{\underline{r \equiv x - 2 = \frac{y-6}{-3} = z + 3}}$.

b)

El punto medio de A(2, 6, -3) y B(3, 3, -2) es $M\left(\frac{5}{2},\ \frac{9}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$.

El haz de planos paralelos y perpendiculares al segmento AB viene dado por la expresión general $\alpha \equiv x - 3y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano π es el que contiene al punto M, por lo cual tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv x - 3y + z + D = 0 \\ M\left(\frac{5}{2},\ \frac{9}{2},\ -\frac{5}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5}{2} - \frac{27}{2} - \frac{5}{2} + D = 0\ ;;\ \underline{D = \frac{27}{2}} \Rightarrow \underline{\pi \equiv x - 3y + z + \frac{27}{2} = 0}$$, o mejor:

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x - 6y + 2z + 27 = 0}}$$

c)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 6 - 3\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$.

El punto P de intersección de la recta r con el plano $\beta \equiv x = 0$ es la solución del sistema que forman: $\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 6 - 3\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases} \\ \beta \equiv x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2 + \lambda = 0\ ;;\ \underline{\lambda = -2} \Rightarrow \underline{\underline{P(0,\ 12,\ -5)}}$.

****

PROPUESTA B

1º) Sea $f(x)=\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$. a) Calcula, si existe $\lim_{x\to 1} f(x)$. b) Halla $\int f(x)\cdot dx$.

2º) a) Determina los valores de α que cumplen la ecuación $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 2 & a \end{vmatrix}=0$.

b) Halla un punto de la recta $r\equiv\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ que no sea coplanario con los puntos A(2, 1, 4), B(1, 2, 2) y C (1, 1, 2).

(Resueltos en la propuesta A)

3º) Sea $h(x)=x^4-2x^3-1$.

a) Enuncia el teorema de Bolzano.

b) Determina los extremos relativos y estudia la monotonía de h.

c) Utiliza el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $h(x)=0$ tiene exactamente dos soluciones reales.

----

a)

El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma:

"Si una función f es continua en un intervalo cerrado [α, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c\in(a,\ b)$ tal que $f(c)=0$".

b)

$$h'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3).$$

$$h'(x)=0\ \Rightarrow\ 2x^2(2x-3)=0\ \Rightarrow\ \underline{x_1=0}\ ;;\ \underline{x_2=\frac{3}{2}}.$$

$$h''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)\ \Rightarrow\ \begin{cases} h''(0)=0\ \rightarrow\ \underline{Punto\ \ de\ \ inflexión} \\ h''\left(\frac{3}{2}\right)=12\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}-1\right)=9>0\ \rightarrow\ \underline{Mínimo\ \ para\ \ x=\frac{3}{2}} \end{cases}.$$

$$h\left(\tfrac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^4-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3-1=\frac{81}{16}-\frac{27}{4}-1=\frac{81-108-16}{16}=-\frac{43}{16}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Mínimo:\ P\left(\frac{3}{2},\ -\frac{43}{16}\right)}}.$$

Por ser $h(x)=x^4-2x^3-1$ una función polinómica su dominio es el conjunto de los números reales y es continua en su dominio.

Los períodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{\underline{h'(x)<0 \Rightarrow x<\frac{3}{2} \Rightarrow Decrecimiento: \left(-\infty,\ \frac{3}{2}\right)}}$$

$$\underline{\underline{h'(x)>0 \Rightarrow x>\frac{3}{2} \Rightarrow Crecimiento: \left(\frac{3}{2},\ +\infty\right)}}$$

c)

Probar que la ecuación $h(x)=0$ tiene exactamente dos soluciones reales es equivalente a probar que la función $h(x)=x^4-2x^3-1$ tiene exactamente dos raíces reales.

Teniendo en cuenta la monotonía de la función, la función h solamente puede cortar al eje X en dos puntos cuyas abscisas tienen que ser menor y mayor que 3/2, respectivamente.

Aplicando el teorema de Bolzano a la función h en el intervalo $\left[-2,\ \frac{3}{2}\right]$:

$$\left.\begin{array}{l} h(-2)=(-2)^4-2\cdot(-2)^3-1=16+16-1=31>0 \\ h\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{43}{16}<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{-2<x_1<\frac{3}{2}}.$$

Aplicando el teorema de Bolzano a la función h en el intervalo $\left[\frac{3}{2},\ 3\right]$:

$$\left.\begin{array}{l} h\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{43}{16}<0 \\ h(3)=3^4-2\cdot 3^3-1=81-54-1=26>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\frac{3}{2}<x_2<3}.$$

Queda probado que la ecuación h(x) = 0 tiene exactamente dos soluciones reales.

****

4º) Discute el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} bx+y+z=3 \\ x+y+z=3 \\ 2x+y+bz=3 \end{cases}$, según los valores del parámetro b, y resuelve cuando el sistema sea compatible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & b \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} b & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & b & 3 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de b es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & b \end{vmatrix}=b^2+1+2-2-b-b=b^2-2b+1=(b-1)^2=0 \Rightarrow \underline{b=1}.$$

$$\underline{\underline{Para\;\; b\neq 1 \Rightarrow Rango\;\; M=Rango\;\; M'=3=n^o\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; determinado}}$$

$$Para\;\; b=1 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_2\} \Rightarrow \underline{Rango\;\; de\;\; M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\;\; b=1 \Rightarrow Rango\; M=Rango\; M'=2<n^o\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; indeterminado}}$$

Resolvemos para b ≠ 1 por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix}}{(b-1)^2}=\frac{0}{(b-1)^2}=\underline{\underline{0}}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} b & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & b \end{vmatrix}}{(b-1)^2}=\frac{3\cdot\begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & b \end{vmatrix}}{(b-1)^2}=\frac{3\cdot(b-1)^2}{(b-1)^2}=\underline{\underline{3}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} b & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{(b-1)^2}=\frac{0}{(b-1)^2}=\underline{\underline{0}}.$$

Para b = 1 el sistema es $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y+z=3 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$, equivalente al sistema $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$,que es compatible indeterminado.

De la observación del sistema se deduce que x = 0, resultando $\{y+z=3$.

$$Soluc\acute{\imath}\acute{o}n:\begin{cases}x=0\\y=3-\lambda,\ \forall\lambda\in R\\z=\lambda\end{cases}.$$

****