PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JULIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) i) Halle una función f tal que $f(0)=1$ y para $x>-1$ cumple $f'(x)=\frac{x}{1+x}$.

ii) Calcule el área de la región que delimita la gráfica de $f'(x)$ y el eje de abscisas para $0 \le x \le 1$.

iii) Determine, si existe, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\sqrt{x+1}-1}$.

----

i)

$$f(x)=\int f'(x)\cdot dx=\int\frac{x}{1+x}\cdot dx=\int\frac{1+x-1}{1+x}\cdot dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\cdot dx=$$

$$=x-L(1+x)+C.$$

$$f(0)=1 \Rightarrow\ 0-L(1+0)+C=1;\ \ 0-0+C=1\ \Rightarrow C=1.$$

$$\underline{f(x)=x-L(1+x)+1}.$$

ii)

En el intervalo $0\le x\le 1$, todas las ordenadas de la función $f'(x)=\frac{x}{1+x}$ son positivas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S=\int_0^1 f'(x)\cdot dx=\int_0^1\frac{x}{1+x}\cdot dx=[x-L(1+x)]_0^1=$$

$$=(1-L2)-(0-L1)=1-L2=1-0{,}593=0{,}307.$$

$$\underline{S=\int_0^1 f'(x)\cdot dx \cong 0{,}307\ u^2.}$$

$iii)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x}}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}=\frac{0}{1\cdot(1-1)}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{(1+x)\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{(1+x)\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{(1+x)(x+1-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{(1+x)\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}+1}{1+x}=\frac{\sqrt{0+1}+1}{1+0}=\frac{1+1}{1}=2.$$

$$\underline{\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\sqrt{x+1}-1}=2.}$$

****

2º) i) ¿Cuál es el ángulo que forman los vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que satisfacen la igualdad $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$?

ii) Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cumplen $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ y su producto escalar es $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$. Calcule el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$.

----

i)

Por definición: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen\,\alpha$, siendo α el ángulo que forman los vectores.

Por ser $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, se deduce que $sen\,\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \alpha = 90°$.

$$\underline{Los\ vectors\ \vec{u}\ y\ \vec{v}\ forman\ un\ ángulo\ de\ 90°.}$$

ii)

Por definición de producto escalar de dos vectores: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$.

Con los datos del ejercicio es: $2 = 1 \cdot 2 \cdot \cos\alpha \;\Rightarrow \cos\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \alpha = 0°$.

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sen\,0° = 1 \cdot 2 \cdot sen\,0° = 2 \cdot 0 = 0.$

Como quiera que el producto vectorial de dos vectores es otro vector:

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cumplen $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ y su producto escalar es $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$. Calcule el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$.

$$\underline{\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}}.$$

****

3º) Sea $g(x) = \frac{x^3-5x}{x^2+1}$.

i) Determine el dominio de g. ii) Halle sus asíntotas.

iii) Determina los extremos relativos y estudie la monotonía de g.

iv) Dibuje la gráfica de g destacando los elementos hallados anteriormente.

----

i)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador y como es $x^2+1 \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow \underline{D(g) \Rightarrow R}$.

ii)

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-5x}{x^2+1} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2+1 \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{g(x)}{x} - mx\right].$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3-5x}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-5x}{x^3+x} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{g(x)}{x} - mx\right] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-5x}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-5x-x^3-x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6x}{x^2+1} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ y = x\ es\ asíntota\ oblicua\ de\ la\ función}.$$

iii)

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) para los valores de x que anulan su primera derivada.

$$g'(x) = \frac{(3x^2-5)\cdot(x^2+1)-(x^3-5x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2-5x^2-5-2x^4+10x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+8x^2-5}{(x^2+1)^2}.$$

$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^4+8x^2-5}{(x^2+1)^2} = 0;\ \ x^4 + 8x^2 - 5 = 0.$

Se trata de una ecuación bicuadrada. Haciendo $x^2 = y\ \Rightarrow\ y^2 + 8y - 5 = 0.$

$y = \frac{-8\pm\sqrt{64+20}}{2} = \frac{-8\pm\sqrt{84}}{2} = \frac{-8\pm\sqrt{4\cdot 21}}{2} = \frac{-8\pm 2\sqrt{21}}{2} = -4 \pm \sqrt{21} \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1 = -4 + \sqrt{21}, y_2 = -4 - \sqrt{21}.$

La solución $y_2 = -4 - \sqrt{21}$ por ser menor que cero no tiene soluciones en x.

$y = -4 + \sqrt{21} \cong 0{,}58$. Deshaciendo el cambio de variable:

$x^2 = y \Rightarrow y = \pm\sqrt{x} = \pm\sqrt{0{,}58} \Rightarrow\ x_1 = -0{,}76, x_2 = 0{,}76.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trate de un máximo relativo y, si es positiva, de un mínimo relativo.

$$g''(x) = \frac{(4x^3+16x)(x^2+1)^2-(x^4+8x^2-5)[2(x^2+1)\cdot 2x]}{(x^2+1)^4} = \frac{(4x^3+16x)(x^2+1)-4x(x^4+8x^2-5)}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{4x^5+4x^3+16x^3+16x-4x^5-32x^3+20x}{(x^2+1)^3} = \frac{-12x^3+36x}{(x^2+1)^3} = \frac{\boldsymbol{-12x\cdot(x^2-3)}}{\boldsymbol{(x^2+1)^3}} = \boldsymbol{g''(x)}.$$

$g''(-0{,}76) = \frac{-12\cdot(-0{,}76)\cdot(-)}{(+)} < 0\ \Rightarrow \boldsymbol{Máximo\ relativo\ para\ x = -0,76}.$

$g(-0{,}76) = \frac{(-0{,}76)^3-5\cdot(-0{,}76)}{(-0{,}76)^2+1} \cong \frac{4{,}26}{1{,}58} = 2{,}42 \Rightarrow \underline{Máx. \Rightarrow A(-0{,}76, 2{,}42)}.$

Por ser $g(-x) = \frac{(-x)^3-5\cdot(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-x^3+5x}{x^2+1} = -\frac{x^3-5x}{x^2+1} = -g(x)$, la función $g(x)$ es simétrica con respecto al origen, por lo cual:

$\underline{Mín. \Rightarrow B(0{,}76, -2{,}42)}.$

Teniendo en cuenta que la función es continua en R y el máximo y mínimo obtenidos anteriormente, la monotonía de la función es la siguiente:

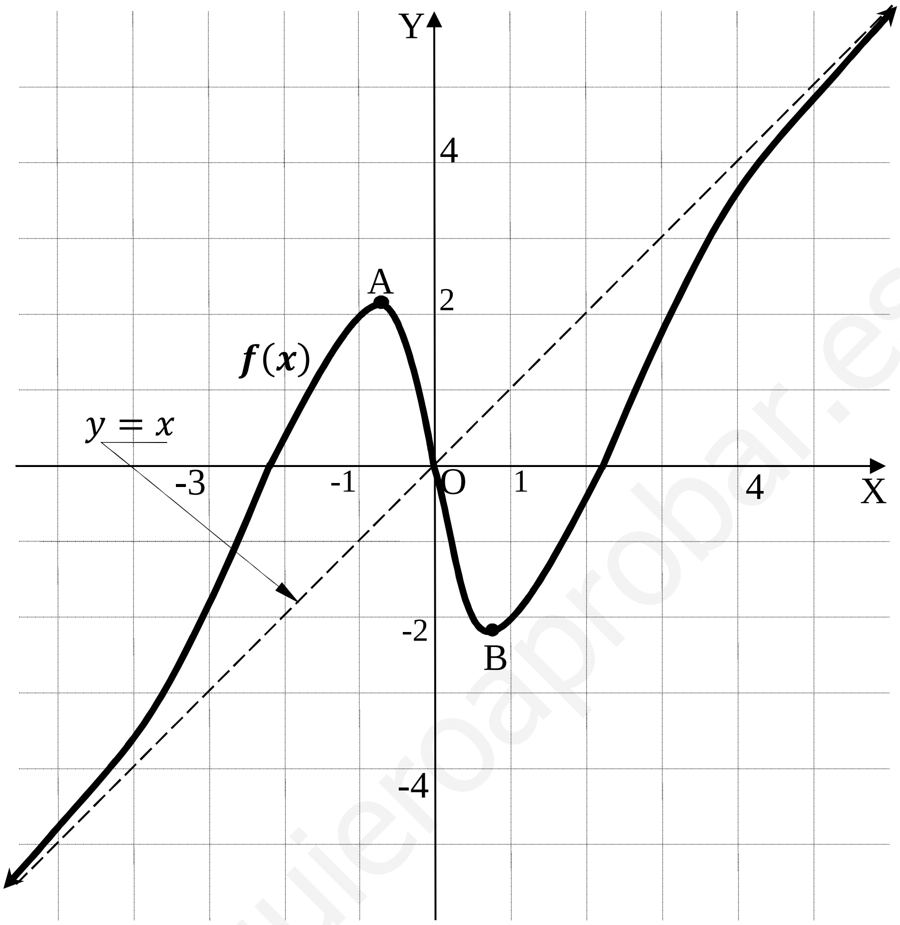
$$\underline{Crecimiento \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -0'76) \cup (0'76, +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-0'76, 0'76)}.$$

$iv)$

Considerando los elementos hallados anteriormente, a representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece a continuación.

También se ha tenido en cuenta que la función pasa por el origen de coordenadas, que es un punto de inflexión.



****

4º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x}{2} = 2 - y = \frac{z-1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 + a\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 5 - 6\lambda \end{cases}, \lambda \in R.$

$i)$ Halle una ecuación para el plano π que pasa por $O(0, 0, 0)$ y es perpendicular a r.

$ii)$ Estudie la posición relativa de las rectas r y s en función de a.

$i)$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (2, -1, 3)$.

Por ser el plano π perpendicular a la recta r, el vector normal del plano es linealmente dependiente del vector director de la recta.

El plano π carece de término independiente por pasar por el origen de coordenadas; su expresión general es la siguiente:

$$\underline{\pi \equiv 2x - y + 3z = 0}.$$

$ii)$

Un punto y un vector director de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $A(0, -2, 1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2, -1, 3)$. Recta s: $B(2, 0, 5)$ y $\overrightarrow{v_s} = (a, 2, -6)$.

Para que los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ sean linealmente dependientes tienen que ser proporcionales sus componentes:

$$\frac{a}{2} = \frac{2}{-1} = \frac{-6}{3} \Rightarrow \frac{a}{2} = -2 \Rightarrow a = -4.$$

Para $a = -4$ las rectas r y s son paralelas. Para diferenciar el caso de que sean o no coincidentes comprobamos si el punto $A \in r$ pertenece o no a la recta s:

$$\left.\begin{array}{l} s \equiv \begin{cases} x = 2 + a\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 5 - 6\lambda \end{cases} \\ A(0, -2, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 0 = 2 - a \\ 1 \neq 5 + 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{A \notin s}, \forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}.$$

$$\underline{Para\ a = -4\ las\ rectas\ r\ y\ s\ son\ paralelas\ no\ coincidentes.}$$

Para $a \neq -4$ los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independiente por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = [B - A] = [(2, 0, 5) - (0, -2, 1)] = (2, 2, 4)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ a & 2 & -6 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 6a - 12 - 12 + 24 - 4a =$$

$= 2a + 16 = 0;\ \ a + 8 = 0 \Rightarrow a = -8.$

$\underline{Para\ a = -8\ las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan.}$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan\ \forall a \in R - \{-4, -8\}.}$

****

PROPUESTA B

1º) $i)$ Halle una función f tal que $f(0) = 1$ y para $x > -1$ cumple $f'(x) = \frac{x}{1+x}$.

$ii)$ Calcule el área de la región que delimita la gráfica de $f'(x)$ y el eje de abscisas para $0 \leq x \leq 1$.

$iii)$ Determine, si existe, $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{\sqrt{x+1}-1}$.

2º) $i)$ ¿Cuál es el ángulo que forman los vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que satisfacen la igualdad $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$?

$ii)$ Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cumplen $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ y su producto escalar es $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$. Calcule el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$.

(Resueltos en la propuesta A)

3º) Sea $g(x) = \begin{cases} \frac{L(x+1)}{x} + 1, & si\ x > 0 \\ ax + b, & si\ x \leq 0 \end{cases}$.

$i)$ Halle los valores de $a\ y\ b$ para que la función g sea continua en R.

$ii)$ Determine los valores de $a\ y\ b$ para los cuales g sea derivable en R.

$iii)$ Para los valores de $a\ y\ b$ del inciso anterior, calcule la derivada de g.

$i)$

La función $g(x)$ es continua en $R, \forall a, b \in R$, excepto para $x = 0$, para lo cual se van a determinar los valores de α y b para que lo sea.

Para que la función sea continua en $x = 0$ es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0} \left[\frac{L(x+1)}{x} + 1\right] = 1 + 1 = 2 \quad (*) \\ \lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0} (ax + b) = b = f(0) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathrm{b} = 2.$$

$$(*)\ \lim_{x \to 0} \frac{L(x+1)}{x} = \frac{L1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \frac{\frac{1}{0+1}}{1} = 1.$$

$\underline{La\ función\ g(x)\ es\ continua\ ex\ x = 0, \forall a \in R\ y\ b = 2.}$

$ii)$

La función resulta: $g(x) = \begin{cases} \frac{L(x+1)}{x} + 1, & si\ x > 0 \\ ax + 2, & si\ x \leq 0 \end{cases}.$

Una función es derivable en un punto cuando, siendo continua en ese punto, existen las derivadas laterales y además son iguales:

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{x-(x+1)L(x+1)}{x^2(x+1)} & (*)\ si\ x > 0 \\ a & si\ x \leq 0 \end{cases}.$$

$(*)\ Siendo\ h(x) = \frac{L(x+1)}{x} \Rightarrow h'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \cdot x - L(x+1)}{x^2} = \frac{\frac{x}{x+1} - L(x+1)}{x^2} = \frac{x-(x+1)L(x+1)}{x^2(x+1)}.$

$g'(0^+) = \frac{0-(0+1)L(0+1)}{0^2(0+1)} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet.$ Se obtiene el límite:

$$\lim_{x \to 0} g'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x-(x+1)L(x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1-\left[1 \cdot L(x+1) + (x+1) \cdot \frac{1}{x+1}\right]}{2x \cdot (x+1) + x^2 \cdot 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1-[L(x+1)+1]}{2x^2+2x+x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1-L(x+1)-1}{2x^2+2x+x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-L(x+1)}{3x^2+2x} =$$

$$= \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x+1}}{6x+2} = \frac{-\frac{1}{0+1}}{0+2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow g'(0^+) = -\frac{1}{2}.$$

$g'(0^-) = a.$

$g'(0^+) = g'(0^-) \Rightarrow a = -\frac{1}{2}.$

$$\underline{g(x)\ es\ derivable\ en\ R\ para\ a = -\frac{1}{2}\ y\ b = 2.}$$

$iii)$

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{x-(x+1)L(x+1)}{x^2(x+1)} & si\ x > 0 \\ -\frac{1}{2} & si\ x \leq 0 \end{cases}.$$

****

4º) Discuta, en función del parámetro β, el sistema $\begin{cases} \beta x + y + z = \beta^2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3\beta \end{cases}$ y resuélvalo cuando sea compatible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} \beta & 1 & 1 & \beta^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3\beta \end{pmatrix}.$$

En primer lugar se determina el rango de la matriz ampliada en función de β:

$$|A'| = \begin{vmatrix} \beta & 1 & 1 & \beta^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3\beta \end{vmatrix} \Rightarrow \text{Sumando la tercera fina a todas las demás:}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} \beta+3 & 0 & 0 & \beta^2+1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 9 & -2 & 0 & 3\beta+1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \beta+3 & 0 & \beta^2+1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 9 & -2 & 3\beta+1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow -\begin{vmatrix} \beta+3 & 0 & \beta^2+1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & 3\beta-1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} \beta+3 & \beta^2+1 \\ 5 & 3\beta-1 \end{vmatrix} = 0;$$

$(\beta+3)(3\beta-1) - 5(\beta^2+1) = 0;\ \ 3\beta^2 - \beta + 9\beta - 3 - 5\beta^2 - 5 = 0;$

$2\beta^2 - 8\beta + 8 = 0;\ \ \beta^2 - 4\beta + 4 = 0;\ \ (\beta-2)^2 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\beta = 2}.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Para\ \beta \neq 2 \Rightarrow Rang\ A = 3; Rang\ A' = 4 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Para $\beta = 2$ es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

$$Rang\ A \Rightarrow \{F_1, F_2, F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 3 + 3 + 2 + 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rang\ A = 3.$

$$\underline{Para\ \beta = 2 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 \Rightarrow S.C.D.}$$

Para $\beta = 2$ el sistema es $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 6 \end{cases}$, que tiene cuatro ecuaciones con tres incógnitas. Para resolverlo es suficiente con tres ecuaciones; cogemos las 3 primeras y resolvemos por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{4-1+1+1+4+1}{2-1+3+3+2+1} = \frac{10}{10} = 1.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{10} = \frac{-2+1+12-3-2+4}{10} = \frac{10}{10} = 1.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{10} = \frac{-2-4+3+12+2-1}{10} = \frac{10}{10} = 1.$$

$$\underline{Solución\ del\ sistema: x = y = z = 1.}$$

****