PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PROPUESTA A

1º) Sea m un número real y los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$ y $\vec{v} = (2, -1, m)$.

i) Halle todos los vectores de módulo 3 que son perpendiculares a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

ii) Determine, si existe, un valor de m tal que el correspondiente vector $\vec{v}$ forma un ángulo de 45° con el vector $\vec{u}$.

----

i)

Un vector perpendicular a dos vectores dados es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los dos vectores.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -m \end{vmatrix} = 2j + k - i + mj = -i + (m+2)j + k.$$

Un vector perpendicular a los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ es $\vec{w} = (-1, m+2, 1)$.

$$|\vec{w}| = 3 \Rightarrow \sqrt{(-1)^2 + (m+2)^2 + 1^2} = 3;\ \ 1 + m^2 + 4m + 4 + 1 = 3;$$

$$m^2 + 4m + 3 = 0;\ \ m = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Rightarrow m_1 = -3, m_2 = -1.$$

Los vectores que cumplen la condición pedida son los siguientes:

$$\underline{\overrightarrow{w_1} = (-1, -1, 1)\ y\ \overrightarrow{w_2} = (-1, 1, 1)}.$$

$ii)$

Por el concepto de producto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{(1,0,1) \cdot (2,-1,m)}{\sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{2^2+(-1)^2+m^2}} =$$

$$= \frac{2-0+m}{\sqrt{1+1} \cdot \sqrt{4+1+m^2}} = \frac{2+m}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5+m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \;\; 2(2+m) = 2\sqrt{5+m^2}; \;\; 2+m = \sqrt{5+m^2};$$

$$4 + 4m + m^2 = 5 + m^2; \;\; 4m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{4}.$$

$\underline{\textit{Los vectores } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \textit{ forman } 45° \textit{ para } m = \frac{1}{4}.}$

****

2º) $i)$ Halle, según el valor de a, el rango de la matriz $M=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & -3 & a+4\end{pmatrix}$.

$ii)$ Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 4 tales que $det(AB)=1$. ¿Qué se puede decir del rango de A?

$i)$

$$M=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & -3 & a+4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix}F_2 \to F_2-3F_1\\ F_3 \to F_3-F_1\\ F_4 \to F_4-2F_1\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 4 & -3\\ 0 & 4 & -3\\ 0 & -1 & a+2\end{pmatrix}.$$

A efectos de rango la matriz M es equivalente a $M'=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 4 & -3\\ 0 & -1 & a+2\end{pmatrix}$.

$$|M'|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 4 & -3\\ 0 & -1 & a+2\end{vmatrix}=4(a+2)-3=0;\;\; 4a+8-3=0;\;\; 4a=-5 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a=-\frac{5}{4}$.

$$\underline{Para\ a \neq -\tfrac{5}{4} \Rightarrow Rang\ M=3.\ Para\ a=-\tfrac{5}{4} \Rightarrow Rang\ M=2.}$$

$ii)$

$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|=1 \Rightarrow |A|\neq 0\ y\ |B|\neq 0.$$

$$\underline{Por\ ser\ |A|\neq 0\ el\ rango\ de\ A\ es\ 4.}$$

(Igual puede decirse del rango de B)

****

3º) En una universidad el 30 % de los alumnos va a la cafetería A, el 60 % va a la cafetería B y el 20 % va a ambas cafeterías.

i) Si se elige al azar un estudiante que va a la cafetería A, halle la probabilidad de que también vaya a la cafetería B.

ii) Si se elige al azar un estudiante de esa universidad, calcule la probabilidad de que el estudiante no vaya a la cafetería A ni a la cafetería B.

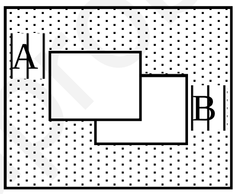
$$P(A) = 0,3; \;\; P(B) = 0,6; \;\; P(A \cap B) = 0,2.$$

i)

$$P = P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3} = \underline{0,6667}.$$

ii)

$$P = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) =$$



$$1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - 0,3 - 0,6 + 0,2 = 1,2 - 0,9 = \underline{0,3}.$$

****

4º) Sea $f(x)=\frac{e^x+x}{e^x-x}$. Sabiendo que $e^x>x$ para todo número real x, para la función f estudie:

i) El dominio y las asíntotas.

ii) La monotonía y los extremos relativos.

iii) Dibuje la gráfica de f destacando los elementos anteriores.

----

i)

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

Como es $e^x>x \Rightarrow e^x-x\neq 0, \forall x\in R$.

$$\underline{D(f)\Rightarrow R}.$$

Asíntotas verticales: Son de la forma $x=k$; son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$$

Horizontales: Son de la forma $y=k$; son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a $\pm\infty$:

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+x}{e^x-x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Indet.\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x+x}{e^x}}{\frac{e^x-x}{e^x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{x}{e^x}}{1-\frac{x}{e^x}}=1.\ (*)$$

(*) $\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Indet.\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=0.$

$$y=k=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x}{e^x-x}=\frac{0-\infty}{0+\infty}\Rightarrow Indet.\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^x+x}{x}}{\frac{e^x-x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^x}{x}+1}{\frac{e^x}{x}-1}=-1.\quad (**)$$

(**) $\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=\frac{e^{-\infty}}{-\infty}=\frac{\frac{1}{e^{\infty}}}{\infty}=\frac{0}{\infty}=0.$

$$\underline{Las\ rectas\ y=1\ e\ y=-1\ son\ asíntotas\ horizontales.}$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

$ii)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{(e^x+1)\cdot(e^x-x)-(e^x+x)\cdot(e^x-1)}{(e^x-x)^2} = \frac{e^{2x}-x\cdot e^x+e^x-x-(e^{2x}-e^x+x\cdot e^x-x)}{(e^x-x)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x}-x\cdot e^x+e^x-x-e^{2x}+e^x-x\cdot e^x+x}{(e^x-x)^2} = \frac{2e^x-2x\cdot e^x}{(e^x-x)^2} = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2} = 0;\ \ 1-x=0 \Rightarrow x=1.$$

Los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

$$\underline{f(x)\ creciente: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, 1).}$$

$$\underline{f(x)\ decreciente: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(1, +\infty).}$$

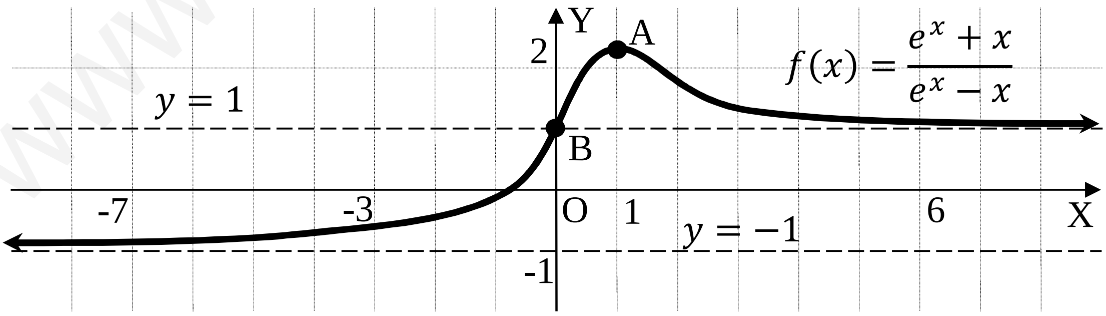
La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada.

Teniendo en cuenta la continuidad de la función y los periodos de crecimiento y decrecimiento, la función $f(x)$ tiene un máximo absoluto para $x = 1$.

$$f(1) = \frac{e^1+1}{e^1-1} = \frac{\sqrt{e}+1}{\sqrt{e}-1} \cong \frac{3,7183}{1,7183} = 2,15 \Rightarrow \underline{Máx.\ A(1, 2'16)}.$$

$iii)$

Teniendo en cuenta que $f(0) = 1 \Rightarrow B(0, 1)$ y todo lo anterior, la representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

PROPUESTA B

1º) Sea m un número real y consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Halle los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.

ii) Determine el rango de A cuando $m = 2$.

----

i)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m_1 = -2, m_2 = 2.$$

$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall m \in R - \{-2, 2\}}.$

ii)

Para $m = 2$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$

$\underline{Para\ a = 2\ el\ rango\ de\ la\ matriz\ A\ es\ 2}.$

****

2º) $i)$ Pruebe que cualquiera que sea el valor de a, los planos $\pi_1 \equiv ax + ay - z = 0$, $\pi_2 \equiv x - y + az = 0$ se cortan en una recta r.

$ii)$ Estudie, en función de a, la posición relativa de la recta r y el plano que contiene a los puntos $A(1,1,1), B(1,0,2)\ y\ C(0,1,2a)$.

$i)$

Dos planos se cortan en una recta cuando sus vectores normales son linealmente independientes, es decir, que no tienen proporcionales sus componentes.

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_1} = (a, a, -1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1, -1, a)$.

$\frac{a}{1} \neq \frac{a}{-1} \neq \frac{-1}{a}, \forall a \in R \Rightarrow \overrightarrow{n_1}\ y\ \overrightarrow{n_2}$ son linealmente independientes.

$\underline{Queda\ probado\ que\ los\ planos\ \pi_1\ y\ \pi_2\ se\ cortan\ en\ una\ recta\ \forall a \in R.}$

$ii)$

La recta en que se cortan los planos π_1 y π_2 es $r \equiv \begin{cases} ax + ay - z = 0 \\ x - y + az = 0 \end{cases}$.

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^2i - j - ak - ak - i - a^2j =$$

$$= (a^2 - 1)i + (-a^2 - 1)j + (-2a)k = (a^2 - 1, -a^2 - 1, -2a) = \overrightarrow{v_r}.$$

Los puntos A, B, y C determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(1,0,2) - (1,1,1)] = (0, -1, 1).$

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0,1,2a) - (1,1,1)] = (-1, 0, 2a - 1).$

La expresión general del plano β que determinan es la siguiente:

$$\beta(B;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2a - 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$-(x - 1)(2a - 1) - y - (z - 2) = 0;\ \ (x - 1)(2a - 1) + y + (z - 2) = 0;$

$2ax - x - 2a + 1 + y + z - 2 = 0 \Rightarrow \beta \equiv (2a - 1)x + y + z + (-1 - 2a) = 0.$

Un vector normal del plano β es $\overrightarrow{n_\beta} = (2a-1, 1, 1)$.

La recta r y el plano β son secantes cuando el producto escalar del vector director de la recta y el vector normal del plano es distinto de cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n_\beta} \neq 0 \Rightarrow (a^2-1, -a^2-1, -2a) \cdot (2a-1, 1, 1) \neq 0;$$

$$(a^2-1)(2a-1) + (-a^2-1) \cdot 1 - 2a \cdot 1 \neq 0;$$

$$2a^3 - a^2 - 2a + 1 - a^2 - 1 - 2a \neq 0; \;\; 2a^3 - 2a^2 - 4a \neq 0; \;\; a^3 - a^2 - 2a \neq 0;$$

$$a(a^2 - a - 2) = 0 \Rightarrow a_1 = 0; \;\; a^2 - a - 2 = 0; \;\; a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 = -1, a_3 = 2.$$

$$\underline{Para \left\{ \begin{matrix} a \neq 0 \\ a \neq -1 \\ a \neq 2 \end{matrix} \right\} la\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \beta\ son\ secantes.}$$

$$\underline{Para \left\{ \begin{matrix} a = 0 \\ a = -1 \\ a = 2 \end{matrix} \right\} la\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \beta\ son\ paralelos.}$$

****

3º) En una universidad el 30 % de los alumnos va a la cafetería A, el 60 % va a la cafetería B y el 20 % va a ambas cafeterías.

i) Si se elige al azar un estudiante que va a la cafetería A, halle la probabilidad de que también vaya a la cafetería B.

ii) Si se elige al azar un estudiante de esa universidad, calcule la probabilidad de que el estudiante no vaya a la cafetería A ni a la cafetería B.

4º) Sea $f(x) = \frac{e^x+x}{e^x-x}$. Sabiendo que $e^x > x$ para todo número real x, para la función f estudie:

i) El dominio y las asíntotas.

ii) La monotonía y los extremos relativos.

iii) Dibuje la gráfica de f destacando los elementos anteriores.

(RESUELTOS EN LA OPCIÓN A)

****