

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS****SEPTIEMBRE - 2000**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

El alumno elegirá una de las dos opciones (A o B).

Contestará a las cuatro cuestiones de la opción elegida.

Puntuación de cada cuestión: máximo 10 puntos.

Se puede utilizar calculadora.

Se valorará la expresión escrita de los pasos y razonamientos realizados.

OPCIÓN A

1º) Una función viene definida de la siguiente manera $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 : \\ -(x-1)^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de f(x).

b) Representar la gráfica de la función.

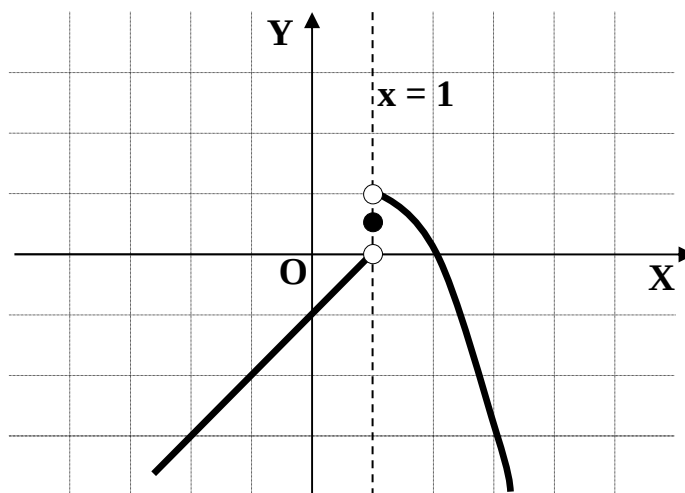
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = \underline{0} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -(x-1)^2 + 1 = \underline{1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq f(1) \Rightarrow \underline{\text{No continua por la derecha}} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq f(1) \Rightarrow \underline{\text{No continua por la izquierda}} \end{array} \right.$$

La función f(x) es discontinua para x = 1 (salto finito)

b)

$f(x) = x-1 \Rightarrow$	x	1	0
	f(x)	0	-1

$f(x) = -(x-1)^2 + 1 \Rightarrow$	X	1	2	3	4
	f(x)	1	0	-3	-8



2º) Dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, determinar los coeficientes a, b y c sabiendo que la gráfica de la f(x) pasa por los puntos A(1, 0) y B(3, 2) y que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 1$ tiene una pendiente de -1.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} A(1, 0) \rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow \underline{a + b + c = 0} & (1) \\ B(3, 2) \rightarrow f(3) = 2 \Rightarrow \underline{9a + 3b + c = 2} & (2) \end{cases}$$

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(1) = -1 \Rightarrow \underline{2a + b = -1} \quad (3)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$$\begin{cases} a + b + c = 0 & (1) \\ 9a + 3b + c = 2 & (2) \\ 2a + b = -1 & (3) \end{cases} \Rightarrow \text{De (3)} \rightarrow \underline{b = -2a - 1} \quad \text{Sustituyendo en (1) y (2):}$$

$$\begin{cases} a + (-2a - 1) + c = 0 \\ 9a + 3(-2a - 1) + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + c = 1 \\ 3a + c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - c = -1 \\ 3a + c = 5 \end{cases} \Rightarrow 4a = 4 \quad ;; \underline{\underline{a = 1}}$$

$$b = -2a - 1 = -2 - 1 = \underline{\underline{-3 = b}} \quad ;; \quad a + b + c = 0 \rightarrow 1 - 3 + c = 0 \quad ;; \underline{\underline{c = 2}}$$

La función es $f(x) = x^2 - 3x + 2$

3º) Discutir y resolver el siguiente sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro m:

$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - 2y + 2z = m \\ 3x - y + mz = 4 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & m \end{pmatrix} ;; M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & m \\ 3 & -1 & m & 4 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & m \end{vmatrix} = -4m + 1 + 6 - 6 + 4 - m = 5 - 5m = 5(1 - m) = 0 \Rightarrow \underline{m = 1}$$

Para $m \neq 1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^{\circ} \text{ incógnitas} \Rightarrow \underline{\text{Compatible determinado}}$

Para $m \neq 1$: Aplicando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ m & -2 & 2 \\ 4 & -1 & m \end{vmatrix}}{5(1-m)} = \frac{2m + m + 8 - 8 - 2 - m^2}{5(1-m)} = \frac{-m^2 + 3m - 2}{5(1-m)} = \frac{(1-m)(m-2)}{5(1-m)} = \underline{\underline{\frac{m-2}{5}}} = x$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & m & 2 \\ 3 & 4 & m \end{vmatrix}}{5(1-m)} = \frac{2m^2 - 4 - 6 + 3m - 16 + m}{5(1-m)} = \frac{2m^2 + 4m - 26}{5(1-m)} = \underline{\underline{\frac{2(m^2 + 2m - 13)}{5(1-m)}}} = y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & m \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{5(1-m)} = \frac{-16 + 1 + 3m - 6 + 2m - 4}{5(1-m)} = \frac{5m - 25}{5(1-m)} = \underline{\underline{\frac{m-5}{1-m}}} = z$$

4º) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1, 2, 3) y es paralela a la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x - y + 3z = 4 \end{cases}$$

En principio, vamos a expresar la recta r en unas ecuaciones paramétricas, para lo cual parametrizamos una de las incógnitas, por ejemplo, z:

$$\underline{z = k} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -1 + k \\ x - y = 4 - 3k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x + 3y = -1 + k \\ 3x - 3y = 12 - 9k \end{cases} \Rightarrow 5x = 11 - 8k \;; \; x = \frac{11}{5} - \frac{8}{5}k \\ \begin{cases} 2x + 3y = -1 + k \\ -2x + 2y = -8 + 6k \end{cases} \Rightarrow 5y = -9 + 7k \;; \; y = -\frac{9}{5} + \frac{7}{5}k \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = \frac{11}{5} - \frac{8}{5}k \\ y = -\frac{9}{5} + \frac{7}{5}k \\ z = k \end{cases}$$

Un vector director de r es: $\vec{v} = (-8, 7, 5)$.

La recta s pedida, expresada mediante ecuaciones continuas es:

$$\underline{\underline{s \equiv \frac{x-1}{-8} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-3}{5}}}$$

OPCIÓN B

1º) a) Dibujar, lo más exactamente posible, las gráficas de las siguientes funciones:

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 6x \\ g(x) = -x^2 + 6x - 8 \end{cases}$$

b) Representar el recinto limitado por ambas funciones y obtener su área.

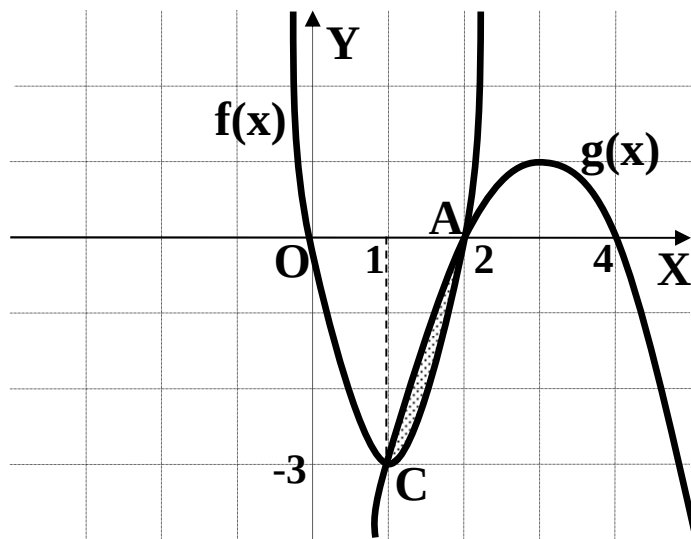
a)

$$f(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow \begin{cases} \text{Corte eje } X \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \quad ; \quad 3x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \underline{O(0, 0)} \\ x_2 = 2 \rightarrow \underline{A(2, 0)} \end{cases} \\ \text{Máx - Mín} \rightarrow f'(x) = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1 \quad ; \quad f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mín}(1, -3)} \end{cases}$$
$$g(x) = -x^2 + 6x - 8 \Rightarrow \begin{cases} \text{Corte eje } X \rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \quad ; \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \rightarrow \underline{B(4, 0)} \\ x_2 = 2 \rightarrow \underline{A(2, 0)} \end{cases} \\ \text{Máx - Mín} \rightarrow f'(x) = -2x + 6 = 0 \rightarrow x = 3 \quad ; \quad f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{\text{Máx}(3, 1)} \end{cases}$$

Los puntos de corte de las dos funciones son:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 3x^2 - 6x = -x^2 + 6x - 8 \quad ; \quad 4x^2 - 12x + 8 = 0 \quad ; \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow \underline{A(2, 0)} \\ x_2 = 1 \rightarrow \underline{C(1, -3)} \end{cases}$$



b)

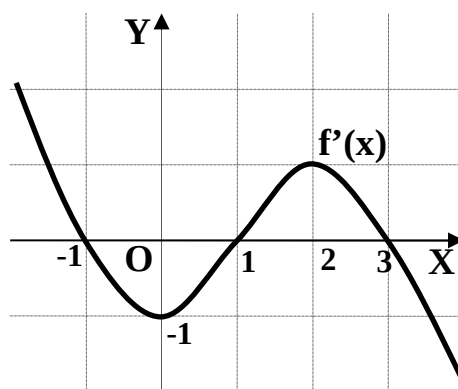
$$A = \int_2^1 f(x) \cdot dx - \int_2^1 g(x) \cdot dx = \int_2^1 [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_2^1 (3x^2 - 6x + x^2 - 6x + 8) \cdot dx =$$

$$= \int_2^1 (4x^2 - 12x + 8) \cdot dx = \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} + 8x \right]_2^1 = \left(\frac{4}{3} - 6 + 8 \right) - \left(\frac{32}{3} - 24 + 16 \right) =$$

$$= \frac{4}{3} + 2 - \frac{32}{3} + 8 = 10 - \frac{28}{3} = \frac{30 - 28}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3} u^2 = A}}$$

www.yoquieroaprobar.es

2º) a) Indicar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función $f(x)$, sabiendo que su función derivada tiene la siguiente gráfica.



b) ¿Qué le ocurre a la función $f(x)$ en $x = 0$ y en $x = 2$? Razonar la respuesta.

a) Una función es creciente cuando su derivada es positiva y decreciente cuando es negativa, por lo tanto:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{\underline{(-\infty, -1) \cup (1, 3) \Rightarrow f(x) \Rightarrow \text{Creciente}}}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{(-1, 1) \cup (3, \infty) \Rightarrow f(x) \Rightarrow \text{Decreciente}}}$$

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo en los puntos en que se anula la derivada. Para diferenciar uno de otro se tiene en cuenta que es máximo cuando la derivada decrece y mínimo cuando la derivada crece, o sea:

$$f(x) \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'(x) \rightarrow \text{Decrece} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximos relativos para } \Rightarrow x = -1 \text{ y } x = 3}}$$

$$f(x) \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'(x) \rightarrow \text{Crece} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo relativo para } \Rightarrow x = 1}}$$

En $x = 0$ la derivada presenta un mínimo relativo y en $x = 2$ tiene un máximo relativo; en ambos casos su derivada se anula, o sea: $f''(x) = 0$, por lo tanto la función presenta puntos de inflexión para los valores indicados.

3º) Calcular la matriz X tal que: $X \cdot A + B = C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ;; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad ;; \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Operando en la expresión que nos dan queda: $X \cdot A = C - B$.

Multiplicando por la derecha por la matriz inversa de A queda:

$X \cdot A \cdot A^{-1} = (C - B) \cdot A^{-1}$. Teniendo en cuenta que $A \cdot A^{-1} = I$ y que $X \cdot I = X$, queda:

$$X = (C - B) \cdot A^{-1} \quad (*)$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ;; \quad A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$$

Por ser $|A| = 1$ la matriz inversa es igual que la matriz adjunta.

$$A^{-1} = \text{Adj. de } A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Sustituyendo el valor de A^{-1} en (*), queda:

$$X = (C - B) \cdot A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+9+0 & 0+0+2 & 8-15+0 \\ -0+3-0 & 0+0-5 & 0-5-0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 \\ 3 & -5 & -5 \end{pmatrix}}} = X$$

4º) Sea el plano de ecuación $\pi \equiv x + 4y = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + ay + 2z = 2 \\ (a+1)x - y - z = 5 \end{cases}$

a) Discutir la posición del plano y la recta en función de los valores de a.

b) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano π para $a = -3$.

a)

El sistema que forman el plano π y la recta r es: $\begin{cases} x + 4y = 0 \\ x + ay + 2z = 2 \\ (a+1)x - y - z = 5 \end{cases}$.

La resolución del sistema en función de a es la siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ a+1 & -1 & -1 \end{pmatrix} ;; M' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & a & 2 & 2 \\ a+1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ a+1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -a + 8(a+1) + 2 + 4 = -a + 8a + 8 + 6 = 7a + 14 = 0 \Rightarrow \underline{a = -2}$$

Para $a \neq -2 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \underline{\text{Compatible determinado}}$

Para $a \neq -2$ la recta es secante al plano: tienen un punto en común

Para $a = -2$ el rango de M' es:

$$M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -10 - 8 + 2 + 20 = 2 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango de } M' = 3}$$

Para $a = -2 \Rightarrow \text{Rango } M \neq \text{Rango } M' \Rightarrow \underline{\text{Incompatible}}$

Para $a = -2$ la recta y el plano no tienen ningún punto en común, son paralelos

Para $a = -3$: Aplicando la Regla de Cramer:

Teniendo en cuenta que $|M| = 7a + 14 = 7 \cdot (-3) + 14 = -21 + 14 = -7$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{40 - 40}{-7} = \frac{0}{-7} = \underline{\underline{0 = x}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-2 + 2}{-7} = \frac{0}{-7} = \underline{\underline{0 = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-15 - 16 + 2 - 20}{-7} = \frac{2 - 51}{-7} = \frac{-49}{-7} = \underline{\underline{7 = z}}$$

Para $a = -3$ el punto de corte de r con π es $P(0, 0, 7)$
