PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

SEPTIEMBRE - 2001

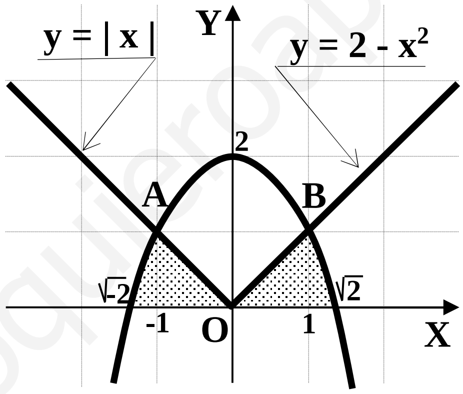
(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Lea cuidadosamente las dos opciones del examen.
Elija una de ellas y conteste a las cuatro cuestiones que figuran en ella.
No conteste a cuestiones correspondientes a diferentes opciones: ello anulará el examen.

OPCIÓN A

1º) Dibujar la figura limitada por la curvas cuyas ecuaciones son: $\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = |x| \end{cases}$, y hallar el área de la misma.



Los puntos de corte de la curva $y = 2 - x^2$ son:

$$2 - x^2 = 0 \;;;\; x^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = +\sqrt{2} \rightarrow \underline{P_1\left(\sqrt{2},\, 0\right)} \\ \underline{x_2 = -\sqrt{2}} \rightarrow \underline{P_2\left(-\sqrt{2},\, 0\right)} \end{cases}$$

Los puntos de corte de ambas funciones son:

$$2 - x^2 = |x|,\ \forall x \in R,\ x < \left|\sqrt{2}\right| \Rightarrow \begin{cases} 2 - x^2 = x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \\ 2 - x^2 = -x \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow \textit{No válida.} \\ x_2 = -1 \rightarrow \underline{A(-1,\, 1)} \end{cases} \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow \textit{No válida.} \\ x_2 = 1 \rightarrow \underline{B(1,\, 1)} \end{cases}$$

Por la simetría de ambas curvas con respecto al eje Y, las dos partes de que se compone el área pedida son iguales, por lo cual su valor es:

$$S = 2\cdot\left[\int_0^1 |x| \cdot dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(2 - x^2\right) \cdot dx\right] = 2\cdot\left[\int_0^1 x \cdot dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(2 - x^2\right) \cdot dx\right] = \underline{2\cdot\left(M + N\right) = S} \qquad (*)$$

$$M = \int_0^1 x \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - 0 = \underline{\frac{1}{2}\ u^2 = M}$$

$$N = \int_1^{\sqrt{2}} \left(2 - x^2\right) \cdot dx = \left[2x - \frac{x^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} = \left[2\cdot\sqrt{2} - \frac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{3}\right] - \left(2\cdot 1 - \frac{1^3}{3}\right) = 2\cdot\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} - 2 + \frac{1}{3} =$$

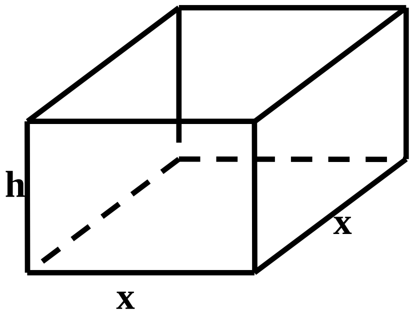
$$= \frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 6 + 1}{3} = \underline{\frac{4\sqrt{2} - 5}{3}\ u^2 = N}$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de M y N, queda:

$$S = M + N = \frac{1}{2} + \frac{4\sqrt{2} - 5}{3} = \frac{3 + 8\sqrt{2} - 10}{6} = \underline{\underline{\frac{8\sqrt{2} - 7}{6}\ u^2 \cong 0'72\ u^2 = S}}$$

****

2º) Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13'5 metros cúbicos. Para ello se dispone de chapa de acero de grosor uniforme. Calcular las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el menor posible.



$$V = x^2 \cdot h = 13'5 \Rightarrow \quad h = \frac{13'5}{x^2} \qquad (*)$$

$$S = x^2 + 4 \cdot (x \cdot h) = x^2 + 4x \cdot \frac{13'5}{x^2} = \frac{x^3 + 54}{x} = S$$

Para que el gasto sea mínimo, la derivada de la superficie tiene que ser cero:

$$S' = \frac{3x^2 \cdot x - \left(x^3 + 54\right) \cdot 1}{x^2} = \frac{3x^3 - x^3 - 54}{x^2} = \frac{4x^3 - 54}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 54 = 0 \;\;;;\;\; 2x^3 - 27 = 0 \;\;;;$$

$$2x^3 = 27 \;\;;;\;\; x^3 = \frac{27}{2} \;\;;;\;\; x = \sqrt[3]{\frac{27}{2}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{2} = \underline{1'5 \cdot \sqrt[3]{4}\ m = a}$$

Sustituyendo en valor de x en (*) obtenemos el valor de h:

$$h = \frac{13'5}{x^2} = \frac{13'5}{\left(\frac{3}{\sqrt[2]{2}}\right)^2} = \frac{13'5}{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}} = \frac{13'5 \cdot \sqrt[3]{4}}{9} = \underline{1'5 \cdot \sqrt[3]{4} \cong 2'38\ metros = h = a}$$

Como puede apreciarse, se trata de un cubo.

$$\underline{\underline{a = h = \sqrt[3]{4} \cong 2'38\ metros}}$$

****

3º) Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & k & 1 \\ -1 & 3 & -k \end{pmatrix}$, discutir la existencia de su inversa en función del parámetro k. ¿Es posible el cálculo de la inversa par k = 2? En caso afirmativo, hallarla.

Para que una matriz sea inversible (tenga inversa) es condición necesaria que su determinante no sea cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & k & 1 \\ -1 & 3 & -k \end{vmatrix}=-k^2+4k-3=0\ \ ;;\ \ k^2-4k+3=0\ \ ;;\ \ k=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}\Rightarrow\begin{cases} \underline{k_1=3} \\ \underline{k_2=1} \end{cases}$$

<u>La matriz m es inversible para cualquier valor real de k, excepto para k = 3 y k = 1.</u>

Para k = 2, resulta: $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Su matriz inversa en la siguiente.

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-4+6-3=\underline{-1=|M|}$$

$$M^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\ \ ;;\ \ Adj\left(M^t\right)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -7 & 9 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\underline{M^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & -9 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}}}$$

****

4º) Discutir la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+2y+(m+1)z=3 \\ -x+y+z=1 \end{cases}$ y el plano π de ecuación $\pi \equiv mx+2y+3z=3$, en función del parámetro m.

La recta r expresada en forma de dos ecuaciones implícitas significa que es la intersección de los dos planos que significan sus ecuaciones. Así pues, el estudio del sistema formado por la recta r y el plano π es en realidad el estudio de tres planos: cada uno significa una de las ecuaciones del sistema resultante, que es el siguiente:

$$\begin{cases} 2x+2y+(m+1)z=3 \\ -x+y+z=1 \\ mx+2y+3z=3 \end{cases}$$

Este es el sistema que vamos a estudiar.

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 2 & m+1 \\ -1 & 1 & 1 \\ m & 2 & 3 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 2 & 2 & m+1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ m & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & m+1 \\ -1 & 1 & 1 \\ m & 2 & 3 \end{vmatrix}=6-2(m+1)+2m-m(m+1)-4+6=8-2m-2+2m-m^2-m=$$

$$=6-m-m^2=0 \;;;\; m^2+m-6=0 \;;;\; m=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{m_1=2} \\ \underline{m_2=-3} \end{cases}$$

$$Para \begin{Bmatrix} m\neq 2 \\ m\neq -3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\, M = Rango\; M' = 3 = n^o\; incógnitas \;\Rightarrow\; \underline{Compatible\;\; determinado}$$

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} m\neq 2 \\ m\neq -3 \end{Bmatrix}\; la\;\; recta\;\; r\;\; y\;\; el\;\; plano\;\; \pi\;\; son\;\; secantes}}$$

Para m = 2 resulta el sistema: $\begin{cases} 2x+2y+3z=3 \\ -x+y+z=1 \\ 2x+2y+3z=3 \end{cases}$

Como puede apreciarse, dos planos son coincidentes y secantes al tercero, lo cual significa que:

Para m = 2 la recta r está contenida en el plano

$Para\ \ m=-3\ \ el\ \ rango\ \ de\ \ M'\ \ es:$

$$M'\ \Rightarrow\ \{C_1,\ C_2,\ C_4\}\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}=6-6-6+9-4+6=9-4=5\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ M'=3}$$

$$Para\ M=-3\ \Rightarrow\ Rango\ M\neq Rango\ M'\Rightarrow\ \underline{Incompatible}$$

Para m = -3 la recta y el plano no tienen puntos en común: recta paralela al plano

****

OPCIÓN B

1º) Se considera la función definida por $f(x)=\begin{cases} a\,sen\ x+b\cos\ x, & x<\frac{\pi}{2} \\ sen^2\ x-a\cos\ x, & x\geq\frac{\pi}{2} \end{cases}$. Determinar a y b para que sea continua y derivable para todos los valores de x.

La función f(x) es continua en todo los valores de su dominio, excepto para $x=\frac{\pi}{2}$, que es dudoso.

Para que f(x) sea continua para $x=\frac{\pi}{2}$ tiene que cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(a\,sen\,\tfrac{\pi}{2}+b\,\cos\tfrac{\pi}{2}\right)=a\cdot 1+b\cdot 0=a \\ \displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(sen^2\,\tfrac{\pi}{2}-a\cos\tfrac{\pi}{2}\right)=1^2=1 \end{array}\right\}\Rightarrow\ \underline{\underline{a=1}}$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} a\cos\ x-b\,sen\ x, & x<\frac{\pi}{2} \\ 2sen\ x\cdot\cos\ x+a\,sen\ x, & x\geq\frac{\pi}{2} \end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases} f'\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^-\right]=-b \\ f'\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^+\right]=a \end{cases}\ \Rightarrow\ a=-b=1\ ;;\ \underline{\underline{b=-1}}$$

****

2º) Obtener la expresión de una función f(x) sabiendo que $f'(x)=(x+1)\cdot e^{2x}$ y que $f(0)=\frac{5}{4}$.

La función buscada es F(x), siendo:

$$F(x)=\int (x+1)\cdot e^{2x}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+1=u \Rightarrow du=dx \\ e^{2x}\cdot dx=dv \rightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x)=(x+1)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}\cdot dx=\frac{x+1}{2}\cdot e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot dx=\frac{x+1}{2}\cdot e^{2x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}+C=$$

$$=\frac{e^{2x}}{4}[2(x+1)-1]+C=\frac{e^{2x}}{4}(2x+2-1)+C=\underline{\frac{e^{2x}}{4}(2x+1)+C=F(x)}$$

La condición de $f(0)=\frac{5}{4}$ nos permite determinar el valor de C:

$$F(x)=\frac{e^{2x}}{4}(2x+1)+C \Rightarrow F(0)=\frac{5}{4}=\frac{e^{0}}{4}(0+1)+C=\frac{1}{4}+C \;;;\; C=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=\underline{1=C}$$

$$\underline{\underline{F(x)=\frac{e^{2x}}{4}(2x+1)+1}}$$

****

3º) En este ejercicio X e Y son dos matrices desconocidas que hay que calcular. Hallarlas, sabiendo que satisfacen el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 5X+3Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3X+2Y=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Multiplicando por -2 la primera ecuación y por 3 la segunda, queda:

$$\left.\begin{array}{r} -10X-6Y=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 8 & -30 \end{pmatrix} \\ 9X+6Y=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 27 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow -X=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{X=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}}$$

Sustituyendo, por ejemplo, en la primera ecuación:

$$5X+3Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow 5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}+3Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} ;; \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -10 & 15 \end{pmatrix}+3Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} ;;$$

$$3Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -10 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 & -15 \\ 10 & -15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -15 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{Y=\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}}$$

****

4º) Determinar las posiciones relativas de las rectas dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} -x+y=4 \\ x+y-2z=-2 \end{cases} \quad ;; \quad s \equiv \frac{x}{3}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-3}{3}.$$

La expresión en unas ecuaciones paramétricas de las rectas r y s es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} -x+y=4 \\ x+y-2z=-2 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=k} \Rightarrow \begin{cases} -x+y=4 \\ x+y=-2+2k \end{cases} \Rightarrow 2y=2+2k \;\;;;\;\; \underline{y=1+k}$$

$$x+y=-2+2k \rightarrow x+1+k=-2+2k \;\;;;\;\; \underline{x=-3+k}$$

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x=-3+k \\ y=1+k \\ z=k \end{cases}} \quad ;; \quad s \equiv \frac{x}{3}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-3}{3} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x=3k \\ y=4+3k \\ z=3+3k \end{cases}}$$

Los vectores directores de r y s son: $\overrightarrow{v_r}=(1,1,1)$ y $\overrightarrow{v_s}=(3,3,3)$. Como puede observarse, son linealmente dependientes, lo cual indica que las rectas r y s son coincidentes o paralelas.

Para diferenciar el caso tomamos un punto de r, por ejemplo: A(-3, 1, 0) y comprobamos si satisface la ecuación de s:

$$s \equiv \frac{x}{3}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-3}{3} \Rightarrow A(-3,1,0) \Rightarrow \frac{-3}{3}=\frac{1-4}{3}=\frac{0-3}{3} \Rightarrow \underline{Se\ \ cumple}$$

<u>Las rectas r y s son coincidentes</u>

****