PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

JUNIO - 2002

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno elegirá una de las dos opciones, A o B, y contestará a las cuatro cuestiones que componen cada opción. No debe mezclar cuestiones de una y otra opción.

OPCIÓN A

1º) Se considera la función siguiente: $f(x)=\begin{cases} x^3-x^2 & (x\le 1) \\ ax+b & (x>1) \end{cases}$.

a) Determinar los valores de a y b para que sea derivable en todos los puntos.

b) Esbozar la gráfica de la curva representativa de la función.

Para que sea derivable en todos los puntos, primero tiene que ser continua para todos los puntos; en el caso que nos ocupa, el punto a estudiar es para x = 1.

Tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales e iguales a f(1):

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-x^2\right)=1-1=f(1)=\underline{0} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(ax+b)=\underline{a+b} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a+b=0} \qquad (*)$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-2x & si\ \ x\le 1 \\ a & si\ \ x>1 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{cases} f'(1^-)=3-2=1 \\ f'(1^+)=a \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{a=1}}$$

Sustituyendo en (*) el valor de a = 1:

$$\underline{\underline{b=-1}}$$

b)

La función resultante es: $f(x)=\begin{cases} x^3-x^2 & (x\le 1) \\ x-1 & (x>1) \end{cases}$.

$$f(x)=x^3-x^2 \;\;;;\;\; f'(x)=3x^2-2x \;\;;;\;\; f''(x)=6x-2 \;\;;;\;\; f'''(x)=6\ne 0$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-2x=0 \;\;;;\;\; x(3x-2)=0 \;\;;;\;\; x_1=0 \;\;;;\;\; x_2=\frac{2}{3} \quad \{x_1\ ;\ x_2<1\}$$

$$f''(0)=-2<0 \Rightarrow \ \textit{Máximo} \ \Rightarrow \ f(0)=0 \ \Rightarrow \ \underline{O(0,\ 0)}$$

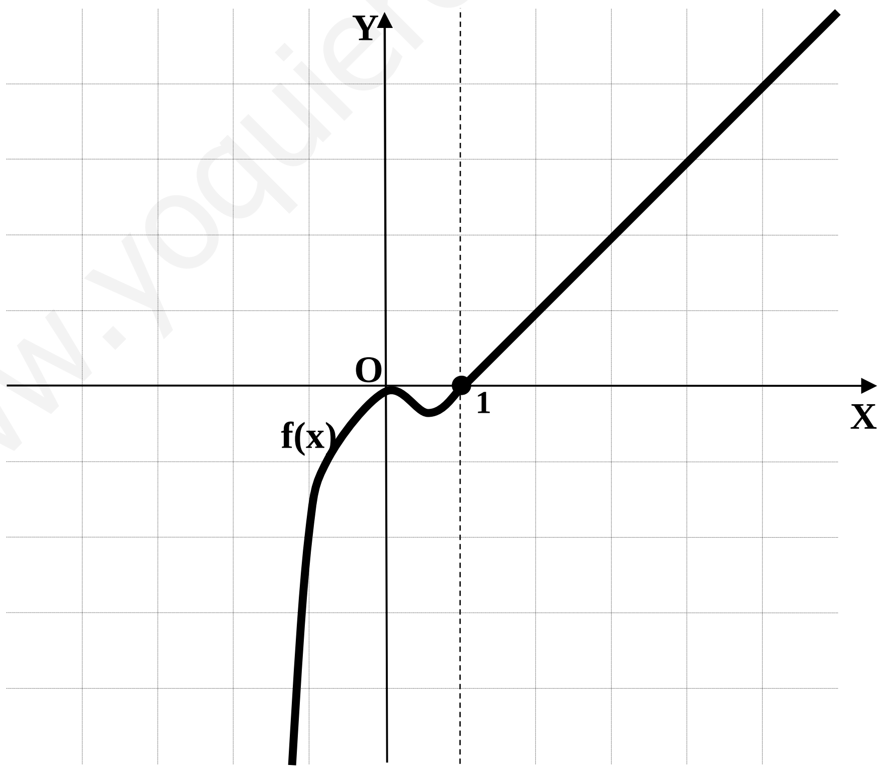
$$f''\left(\tfrac{2}{3}\right)=6\cdot\frac{2}{3}-2=4-2=2>0 \ \Rightarrow \ \textit{Mínimo} \ \Rightarrow \ f\left(\tfrac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}-\frac{4}{9}=$$

$$=\frac{8-12}{27}=-\frac{4}{27}\cong -0'15 \Rightarrow \ \underline{P\left(\frac{2}{3},\ -\frac{4}{27}\right)}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow 6x-2=0 \;\;;;\;\; 3x-1=0 \;\;;;\;\; x=\frac{1}{3}<1$$

$$f'''\left(\tfrac{1}{3}\right)=6\ne 0 \ \Rightarrow \ P.I. \ \Rightarrow \ f\left(\tfrac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{27}-\frac{1}{9}=\frac{1-3}{27}=-\frac{2}{27} \ \Rightarrow \ \underline{Q\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{27}\right)}$$

Su representación gráfica aproximada es la siguiente:



****

2º) Calcular la primitiva: $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2} \cdot dx$.

$$I = \int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2} \cdot dx = \int \left(\frac{x}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x^2} \right) \cdot dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x^2} \right) \cdot dx = \int \frac{1}{x} \cdot dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} \cdot dx =$$

$$= L\,x + \int x^{\frac{1}{2}-2} \cdot dx = L\,x + \int x^{-\frac{3}{2}} \cdot dx = L\,x + \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = L\,x + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = L\,x - \frac{2}{\sqrt{x}} + C =$$

$$= \underline{\underline{L\,x - \frac{2\sqrt{x}}{x} + C = I}}$$

****

3º) Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, se pide:

a) Dar una definición de rango (o característica) de una matriz.
b) ¿Es cierto que rango (A · B) = (rango A) · (rango B)? Justificar la respuesta.

----

a)

Todas las matrices, mediante transformaciones elementales, se pueden transformar en matrices escalonadas.

Una matriz escalonada es aquella en la cual, si tiene filas nulas están situadas en la parte inferior de la matriz y, en las filas no nulas, el primer elemento distinto de cero de una fila está situado más a la derecha que el primer elemento diferente de cero de la fila superior.

El rango de una matriz escalonada es el número de filas no nulas.

El rango de una matriz A es el rango de una matriz escalonada equivalente a A.

También puede definirse el rango de una matriz por su determinante, para lo cual es necesario definir menor de orden k de una matriz que es el determinante de cualquier submatriz cuadrada de orden k que se puede formar con los elementos de la matriz.

El rango de una matriz A es el orden del mayor menor que puede formarse que sea distinto de cero.

b)

Es evidente que el rango de ambas matrices es 2. Veamos cuál es el rango del producto de las dos matrices:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+0 & 2-0 & 0+0 \\ -2-6 & 2+1 & 0-1 \\ -4+6 & 4-2 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -8 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -8 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -12 - 4 + 4 + 32 = 32 - 12 = 20 \neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango\ (A \cdot B) = 3}$$

Como puede apreciarse, es falso que rango (A · B) = (rango A) · (rango B), ya que: rango (A · B) = 3 ;; (rango A) · (rango B) = 2 · 2 = 4.

<u>Es falso que rango (A · B) = (rango A) · (rango B)</u>

****

4º) En el espacio se da la recta r definida por los puntos A(1, 2, 3) y B(-1, 6, 2). Hallar el valor del parámetro k para que el punto P(k, 2k, 3k) pertenezca a la recta r.

La recta r tiene como vector director $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-2,\ 4,\ -1)$ y su expresión por unas ecuaciones paramétricas puede ser la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$.

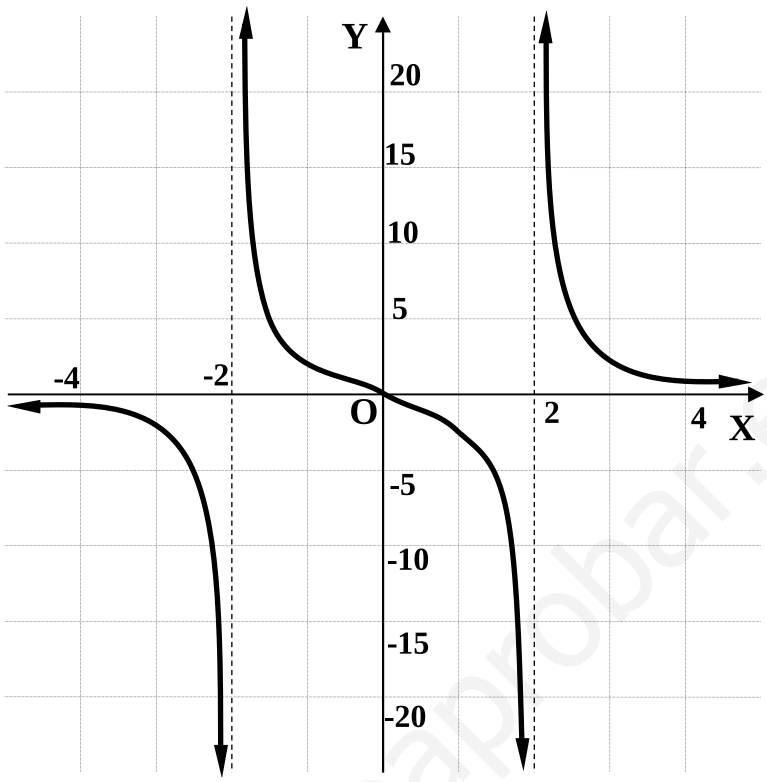
Si el punto P(k, 2k, 3k) pertenece a la recta r tiene que satisfacer su ecuación, o sea, que también se puede poner: $r \equiv \begin{cases} x = k - 2\lambda \\ y = 2k + 4\lambda \\ z = 3k - \lambda \end{cases}$.

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k - 2\lambda \\ y = 2k + 4\lambda \\ z = 3k - \lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{k = 1}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Considerar la gráfica siguiente, perteneciente a una cierta función f(x). Se pide:



a) Indicar dónde es continua y derivable. Explicar por qué no lo es en los puntos donde no es ni continua ni derivable.

b) ¿Hay algún intervalo en el que $f'(x) \leq 0$? Explicar qué significa lo que afirme al respecto.

c) ¿Existe algún valor p tal que $f'(p) = 0$? Decir cuál o cuáles.

d) Escribir las ecuaciones de todas las asíntotas y explicar por qué lo son.

----

a)

La función f(x) es continua y derivable en su dominio de definición que es el conjunto de números reales, excepto para los valores x = -2 y x = 2, en cuyo caso la función no está definida y, es condición necesaria, que para que una función sea derivable en un punto, primero tiene que ser continua, y para los puntos indicados no lo es.

b)

$f'(x) \leq 0$ significa que la pendiente a la curva es negativa, es decir, que el ángulo que forma la recta tangente con la parte positiva del eje de abscisas es obtuso.

De otra manera: la derivada es negativa cuando la función es decreciente. Esta circunstancia concurre en el siguiente intervalo: $\underline{\underline{f'(x) \leq (-2,\ 0] \cup (2,\ +\infty)}}$.

c)

El punto donde $f'(x) = 0$ es el origen de coordenadas, $O(0, 0)$, por pasar la función de decreciente a creciente.

d)

El eje de abscisas es una asíntota vertical; su ecuación es $y = 0$.

Las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son dos asíntotas verticales.

Son asíntotas por ser tangente cuando x tiende a infinito para la horizontal y en el caso de las verticales, son valores de x que hacen que la función tienda a valer infinito.

****

2º) Un número más el cuadrado de otro número suman 48. Hallar ambos números para que su producto sea máximo.

Sean los números pedidos x e y.

Por condición del problema es: $P = x + y^2 = 48 \;;;\; \underline{x = 48 - y^2}$

$P = x \cdot y \Rightarrow Máximo \;;;\; P(y) = \left(48 - y^2\right) \cdot y = 48y - y^3$

$P'(y) = 48 - 3y^2 = 0 \;;;\; 48 - 3y^2 = 0 \;;;\; 16 - y^2 = 0 \;;;\; y^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} \underline{y_1 = 4} \\ \underline{y_2 = -4} \end{cases}$

$$P''(y) = -6y \Rightarrow \begin{cases} P''(4) = -6 \cdot 4 = -24 < 0 \Rightarrow \underline{Máximo \;\; para \;\; y = 4} \\ \\ P''(-4) = -6 \cdot (-4) = 24 > 0 \Rightarrow \underline{Mínimo \;\; para \;\; y = -4} \end{cases}$$

Los números que cumplen la condición son 32 y 4.

****

3º) Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro m y resolverlo para un valor que lo haga compatible determinado: $\left.\begin{array}{r} x+y+2z=2 \\ -3x+2y+3z=-2 \\ 2x+my-5z=-4 \end{array}\right\}$

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & m & -5 \end{pmatrix} ;;\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & m & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & m & -5 \end{vmatrix}=-10-6m+6-8-3m-15=-9m-27=0\ ;;\ m+3=0\ ;;\ \Rightarrow\ \underline{m=-3}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m\neq 3\ \Rightarrow\ Rango\ \ M=Rango\ \ M'=3=n^{o}\ \ incógnitas\Rightarrow Compatible\ \ Determinado}}$$

$Para\ \ m=-3\ \ el\ \ rango\ \ de\ \ M'\ \ es:$

$$M'\Rightarrow\{C_1,\ C_2,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix}=-8+18-4-8-6-12=-20\neq 0\Rightarrow Rango\ \ M'=3$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m=-3\ \Rightarrow\ Rango\,M\neq Rango\ \ M'\ \Rightarrow\ \ Incompatible}}$$

Resolviendo para $\forall m\in R,\ \ m\neq -3$, aplicando la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & m & -5 \end{vmatrix}}{-9m-27}=\frac{-20-4m-12+16-6m-10}{-9(m+3)}=\frac{-10m-26}{-9(m+3)}=\frac{-2(5m+13)}{-9(m+3)}=\underline{\underline{\frac{2(5m+13)}{9(m+3)}=x}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -5 \end{vmatrix}}{-9m-27}=\frac{10+24+12+8+12-30}{-9(m+3)}=\frac{66-30}{-9(m+3)}=\frac{36}{-9(m+3)}=\underline{\underline{\frac{-4}{m+3}=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & m & -4 \end{vmatrix}}{-9m-27}=\frac{-8-6m-4-8+2m-12}{-9(m+3)}=\frac{-4m-32}{-9(m+3)}=\frac{-4(m+8)}{-9(m+3)}=\underline{\underline{\frac{4(m+8)}{9(m+3)}=z}}$$

****

4º) Dada la recta r de ecuaciones $r \equiv \frac{x-5}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$, se pide:

a) ¿Cuál es su vector director?

b) ¿Pertenece el punto P(9, -1, 1) a la recta r?

c) Las ecuaciones de una recta s que sea paralela al a recta r y pase por A(-1, 1, 0).

----

a)

Un vector director de r es $\underline{\underline{\overrightarrow{v} = (4,\ -1,\ 2)}}$.

b)

Para que el punto P(9, -1, 1) pertenezca a la recta r es necesario que satisfaga su ecuación:

$$\frac{9-5}{4} = \frac{-1}{-1} = \frac{1+1}{2} \Rightarrow \frac{4}{4} = \frac{-1}{-1} = \frac{2}{2} \Rightarrow \underline{\underline{El\ \ punto\ \ P\ \ pertenece\ \ a\ \ r}}$$

c)

Por ejemplo expresada en unas ecuaciones paramétrias sería:

$$\underline{\underline{s \equiv \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}}}$$

****