PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

SEPTIEMBRE - 2002

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los repertorios que a continuación se proponen.

Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2'5 puntos como máximo.

OPCIÓN A

1º) Dada la función f(x) definida por $f(x)=\begin{cases} x^2-5x+m & (x\le 1) \\ -x^2+nx & (x>1)\end{cases}$, se pide:

a) Calcular los valores de los parámetros m y n para que sea continua y derivable en todos los puntos del intervalo [-20, 20].

b) Dibujar esquemáticamente la gráfica de la función, señalando los extremos.

----

a)

Para que sea continua para x = 1 tiene que cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-5x+m\right)=1-5+m=\underline{m-4} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(-x^2+nx\right)=-1+n=\underline{n-1}\end{array}\right\} \Rightarrow m-4=n-1\ ;;\ \underline{m-n=3} \quad (1)$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

El único punto a estudiar es el límite de los dos intervalos en que se divide la función definida a trozos que nos atañe, o sea, x = 1:

$$f'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2-5(1+h)+m-\left(1^2-5\cdot 1+m\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{1+2h+h^2-5-5h+m-1+5-m}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2h+h^2-5h}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h(h-3)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}(h-3)=\underline{-3=f'(1^-)}$$

$$f'(1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-(1+h)^2 + n(1+h) - (-1^2 + n \cdot 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{-1 - 2h - h^2 + n + nh + 1 - n}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-2h - h^2 + nh}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h(-2 - h + n)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} (-2 - h + n) = \underline{n - 2 = f'(1^+)}$$

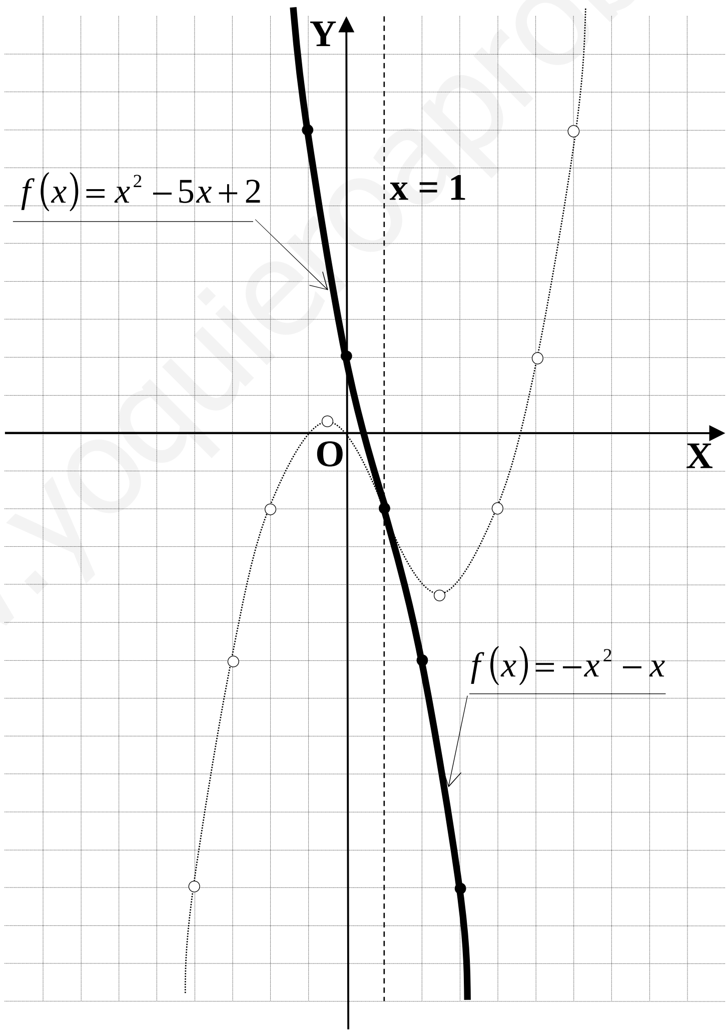
$$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow \; -3 = n - 2 \;;;\; \underline{\underline{n = -1}}$$

Sustituyendo en (1) el valor de n resulta: $m - n = 3 \;;;\; m + 1 = 3 \;;;\; \underline{\underline{m = 2}}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 2 & (x \leq 1) \\ -x^2 - xx & (x > 1) \end{cases}$

$f(x) = x^2 - 5x + 2$

x	$f(x)$
1	-2
0	2
-1	8



$f(x) = -x^2 - x$

x	$f(x)$
1	-2
2	-6
3	-12

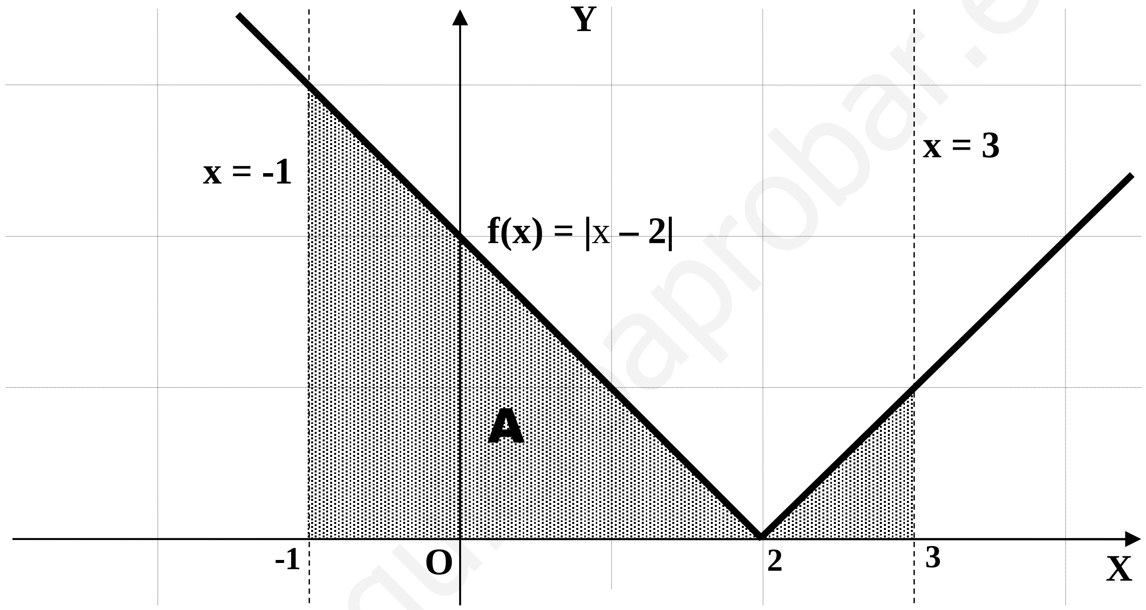
****

2º) Representar gráficamente la función $g(x) = |x - 2|$ y hallar el área limitada por su gráfica, el eje OX y las rectas de ecuaciones x = -1 y x = 3.

La función g(x) se puede redefinir de la forma: $g(x) = \begin{cases} 2 - x & si \ x \leq 2 \\ x - 2 & si \ x > 2 \end{cases}$, lo cual facilita la comprensión y la resolución del ejercicio.

Formamos una tabla de valores:

x	2	3	0	-1
f(x)	0	1	2	3



$$A = \int_{-1}^{2} (2 - x)\, dx + \int_{2}^{3} (x - 2)\, dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{2} + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_{2}^{3} =$$

$$= \left(4 - \frac{4}{2} \right) - \left(-2 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{9}{2} - 6 \right) - \left(\frac{4}{2} - 4 \right) = 4 - 2 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} - 6 - 2 + 4 = \underline{\underline{5\ u^2 = A}}$$

****

3º) Resolver razonadamente el siguiente sistema, donde A y B son matrices desconocidas, ¿de qué tamaño serán?:

$$\left.\begin{array}{l} 3A+2B=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\ 2A-3B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 9A+6B=\begin{pmatrix} 24 & 9 \\ 15 & 12 \end{pmatrix} \\ 4A-6B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -12 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \ 13A=\begin{pmatrix} 26 & 13 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}$$

$$3A+2B=\begin{pmatrix} 24 & 9 \\ 15 & 12 \end{pmatrix} \ ;; \ \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+2B=\begin{pmatrix} 24 & 9 \\ 15 & 12 \end{pmatrix} \ ;; \ 2B=\begin{pmatrix} 24 & 9 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 12 & 12 \end{pmatrix} \ \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{B=\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}}}$$

****

4º) Decidir si el plano de ecuación cartesiana $x+y+z=1$ también viene dado por las ecuaciones paramétricas: $\pi \equiv \begin{cases} x=\frac{1}{2}-\lambda-\mu \\ y=\frac{1}{2}+\lambda-\mu \\ z=2\mu \end{cases}$

Teniendo en cuenta que el punto $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ pertenece al plano π y que tiene como vectores directores $\overrightarrow{u}=(-1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{v}=(-1, -1, 2)$, la expresión cartesiana o general del plano π es:

$$\pi(P; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-\frac{1}{2} & y-\frac{1}{2} & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x-1 & 2y-1 & 2z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;;;$$

$$2(2x-1)+2z+2z+2(2y-1)=0 \;;;\; 4x-2+4z+4y-2=0 \;;;\; 4x+4y+4z-4=0$$

$$\underline{\underline{En\ \ efecto,\ \pi \equiv x+y+z=1}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la función $f(x)=ax^2+bx+c$, determinar los valores de a, b y c, sabiendo que la gráfica de f(x) pasa por los puntos A(0, 3), B(1, 4) y que la recta y = 4 es tangente a dicha gráfica cuando x = 1.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^2+bx+c \\ A(0,\ 3) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(0)=\underline{\underline{c=3}}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^2+bx+3 \\ B(1,\ 4) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(1)=a+b+3=4 \ ;;\ \underline{a+b=1} \qquad (*)$$

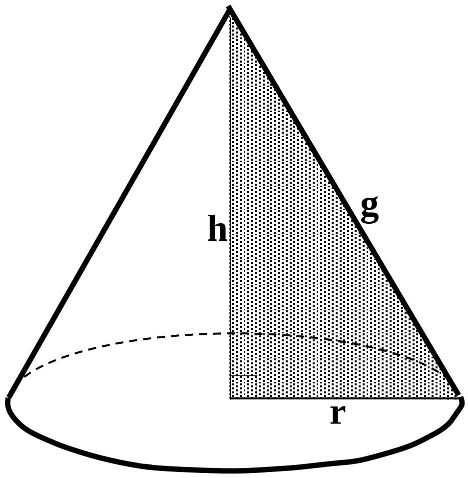
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^2+bx+3 \\ f'(x)=2ax+b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f'(1)=\underline{2a+b=4} \qquad (**)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (*) y (**) se obtienen los valores de a y b:

$$\left.\begin{array}{r} a+b=1 \\ 2a+b=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -a-b=-1 \\ 2a+b=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{a=3}} \ ;;\ a+b=1 \ ;;\ 3+b=1 \ ;;\ \underline{\underline{b=-2}}$$

****

2º) Hallar las dimensiones (altura h y radio de la base, r) de un cono recto de volumen máximo, sabiendo que la altura más el radio de la base vale 12 metros.



$$\left.\begin{array}{l} V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h \\ r + h = 12 \;\; ;; \;\; h = 12 - r \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot (12 - r) = 4\pi r^2 - \frac{1}{3}\pi r^3$$

$$V' = 8\pi r - \pi r^2 = \pi r (8 - r) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 8 \end{cases}$$

(Es evidente que r = 0 es para volumen mínimo)

Vamos a justificar que con r = 8 se obtiene un máximo para el volumen:

$$V''(r) = 8\pi - 2\pi r = 2\pi(4 - r) \quad \Rightarrow \quad V''(8) = 2\pi(4 - 8) = -8\pi < 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{Máximo, c.q.j.}}}$$

<u>Las dimensiones son: r = 8 cm y h = 4 cm.</u>

****

3º) Se considera la matriz cuadrada $M=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. Hallar el valor del parámetro k para que el determinante $\left|M^2-kM\right|$ sea nulo.

$$M^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}=M^2}$$

$$M^2-k\cdot M=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}-k\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -k\\ k & -2k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2-k\\ k-2 & 3-2k\end{pmatrix}$$

$$\left|M^2-k\cdot M\right|=\begin{vmatrix}-1 & 2-k\\ k-2 & 3-2k\end{vmatrix}=0\Rightarrow -1\cdot(3-2k)-(2-k)(k-2)=0\ \ ;;$$

$$3-2k+(2-k)(k-2)=0\ \ ;;\ \ 3-2k+2k-4-k^2+2k=0\ \ ;;\ \ -1+2k-k^2=0\ \ ;;$$

$$k^2-2k+1=0\ \ ;;\ \ (k-1)^2=0\ \ ;;\ \ k-1=0\ \ ;;\ \ \underline{\underline{k=1}}$$

****

4º) Calcular el valor de a para que los cuatro puntos siguientes estén en el mismo plano. A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1) y D(1, 1, a).

Vamos a resolver el problema de la forma siguiente: Determinamos el plano π que pasa por los puntos A, B y C y después hacemos que el punto D pertenezca a π.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 1,\ 0) - (1,\ 0,\ 0) = (-1,\ 1,\ 0) \\ \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 0,\ 1) - (1,\ 0,\ 0) = (-1,\ 0,\ 1)\end{array}\right\}$$ Tomamos, por ejemplo, el punto A:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ x - 1 + z + y = 0 \ ;;\ \underline{\pi \equiv x + y + z - 1 = 0}$$

Para que el punto D pertenezca al plano π es necesario que se cumpla:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z - 1 = 0 \\ D(1,\ 1,\ a) \end{array}\right\} \Rightarrow \ 1 + 1 + a - 1 = 0 \ ;;\ \underline{\underline{a = -1}}$$

****