

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS****SEPTIEMBRE - 2003**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen cada opción. No mezcle cuestiones de una y otra opción.

OPCIÓN A

1º) Hacer un esquema de la gráfica de una función $f(x)$ que cumpla las siguientes propiedades:

a) Tiene dos asíntotas verticales para $x = -3$ y $x = 3$.

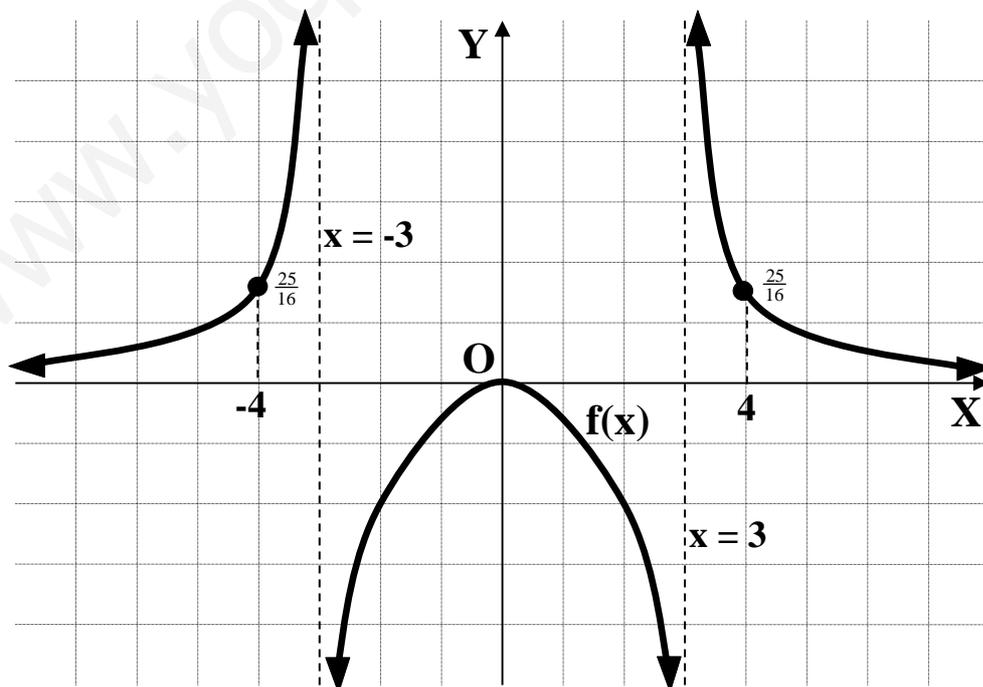
b) Para $x \rightarrow \pm\infty$, se cumple que $f(x) \rightarrow 0$.

c) $f(-4) = f(4) = \frac{25}{16}$.

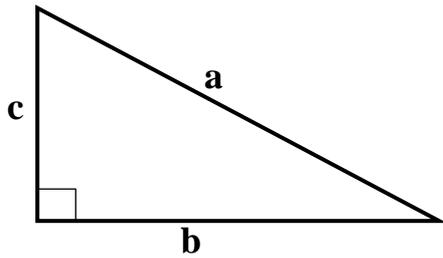
d) Es creciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$ y es decreciente en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$.

e) $f(0) = 0$ y $f'(0) = 0$.

Una representación aproximada de lo pedido es la siguiente:



2º) De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 15 cm, hallar las dimensiones de que tenga área máxima.



 $b + c = 15 \quad ; ; \quad c = 15 - b$

$$S = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{b \cdot (15 - b)}{2} = \frac{1}{2}(15b - b^2) = S$$

El área será máxima cuando su derivada sea cero:

$$S' = \frac{1}{2} \cdot (15 - 2b) = 0 \Rightarrow 15 - 2b = 0 \quad ; ; \quad b = \frac{15}{2} = 7'5 = b$$

$$c = 15 - b = 15 - 7'5 = 7'5 = c = b$$

Justificación:

$$S'' = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Máximo, c.q.j.}}$$

El triángulo de área máxima es un triángulo rectángulo e isósceles de catetos 7'5 u.

3°) Estudiar para qué valores de m es inversible la matriz $M = \begin{bmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & m \end{bmatrix}$ y, en caso de ser posible, hallar su inversa para $m = -1$.

Una matriz es inversible cuando su determinante es distinto de cero:

$$|M| = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & m \end{vmatrix} = m^2 - m = 0 \quad ; \quad m(m-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = 1 \end{cases}$$

Tiene inversa $\forall m \in \mathbb{R}, \{m \neq 0; m \neq 1\}$

Para $m = -1$ la matriz resulta: $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Vamos a calcular su inversa aplicando el método de Gaus-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow -F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 + F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_3 \rightarrow -\frac{1}{2}F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 + F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 - F_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\underline{M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}}$$

4º) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + mx - 3 = 0$, estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π según los valores del parámetro m , hallar también el punto de intersección de la recta r y el plano π en el caso de $m = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + mz = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix} \quad ;; \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & m & 3 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = 2m + 1 - 2 - 4 + 1 - m = m - 4 = 0 \quad ;; \quad \underline{m = 4}$$

Para $m \neq 4 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Determinado}$

Para $m \neq 4$ la recta r y el plano π son secantes

$$\text{Para } m = 4 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Para $m = 4$ el rango de M' es:

$$\left. \begin{array}{l} \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 - 4 - 3 = 0 \\ \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 2 - 3 = 0 \\ \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 8 + 1 - 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}$$

Para $m = 4 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$

Para $m = 4$ la recta r está contenida en el plano π

Para $m = 1$ la recta es secante al plano, por lo tanto tienen un punto en común que vamos a determinar:

$$\text{El sistema resultante es: } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \end{array} \right\} \text{Aplicando la Regla de Cramer:}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2 - 3 - 6 + 1}{2 + 1 - 2 - 4 + 1 - 1} = \frac{-6}{-3} = \underline{2 = x}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{3 - 2 + 3 - 1}{-3} = \frac{3}{-3} = \underline{-1 = y}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{6 + 1 - 4 - 3}{-3} = \frac{0}{-3} = \underline{0 = z}$$

El punto de corte es la solución del sistema, o sea: $P(2, -1, 0)$.

OPCIÓN B

1º) Dada la función definida por $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & (x < 0) \\ -x^2 + ax + b & (x \geq 0) \end{cases}$ determinar los valores de a y b para que resulte derivable en todos los puntos en que esté definida.

La función es continua y derivable $\forall x \in \mathbb{R}$, con la excepción de $x = 0$, que es dudoso. Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

Para que $f(x)$ sea continua para $x = 0$ tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sen } x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + ax + b) = f(0) = \underline{b} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{b = 0}}$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ -2x + a & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = \cos 0 = \underline{1} \\ f'(0^+) = \underline{a} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{a = 1}}$$

La función es derivable en \mathbb{R} para $a = 1$ y $b = 0$.

2º) Dadas las funciones $f(x) = -2x^2 + 12x - 10$ y $g(x) = -x^2 + 6x - 5$, se pide:

a) Representar el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.

b) Calcular el área de dicho recinto.

a)

Los puntos de corte de $f(x)$ con los ejes son:

$$\text{Eje X: } f(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 12x - 10 = 0 \quad ; ; \quad x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \rightarrow \underline{A(5, 0)} \\ x_2 = 1 \rightarrow \underline{B(1, 0)} \end{cases}$$

$$\text{Eje Y: } x = 0 \rightarrow \underline{C(0, -10)}$$

Los puntos de corte de $g(x)$ con los ejes son:

$$\text{Eje X: } g(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0 \quad ; ; \quad x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{A(5, 0)} \\ \underline{B(1, 0)} \end{cases}$$

Como puede apreciarse, son los mismos que para $f(x)$, por lo cual, éstos son los puntos de corte de las dos funciones.

$$\text{Eje Y: } x = 0 \rightarrow \underline{D(0, -5)}$$

Por ser el coeficiente de x^2 menor que x en ambas funciones, son las dos convexas (\cap), cuyos máximos son:

$f(x)$:

$$f'(x) = -4x + 12 \quad ; ; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \underline{x = 3} \quad ; ; \quad f(3) = -18 + 36 - 10 = 8 \Rightarrow \underline{E(3, 8)}$$

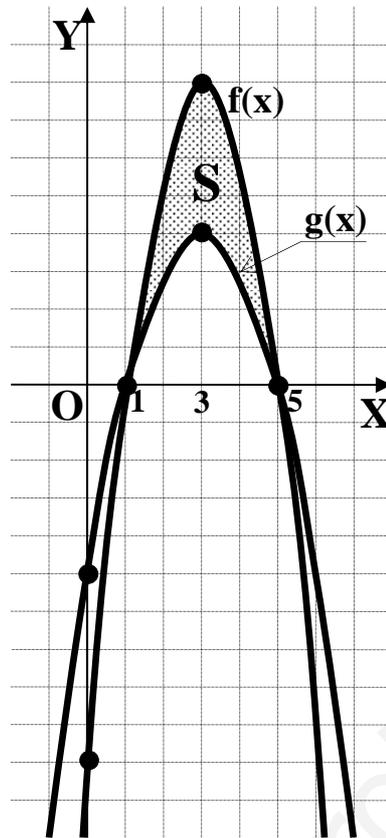
$$f''(x) = -4 < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo}}, \text{ como cabía esperar.}$$

$g(x)$:

$$g'(x) = -2x + 6 \quad ; ; \quad g'(x) = 0 \Rightarrow \underline{x = 3} \quad ; ; \quad g(3) = -9 + 18 - 5 = 4 \Rightarrow \underline{F(3, 4)}$$

$$g''(x) = -2 < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo}}, \text{ como cabía esperar.}$$

La representación gráfica de la situación se indica en la figura siguiente:



b)

$$S = \int_1^5 [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_1^5 [(-2x^2 + 12x - 10) - (-x^2 + 6x - 5)] \cdot dx =$$

$$= \int_1^5 (-2x^2 + 12x - 10 + x^2 - 6x + 5) \cdot dx = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right]_1^5 =$$

$$= \left(-\frac{125}{3} + 75 - 25 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5 \right) = -\frac{125}{3} + 50 + \frac{1}{3} + 2 = 52 - \frac{124}{3} = \frac{156 - 124}{3} = \frac{32}{3} \text{ u}^2 = S$$

3º) Discutir el siguiente sistema en función de los valores del parámetro m y resolverlo para $m = -2$.

$$\left. \begin{aligned} x + my - z &= 1 \\ 2x + y - mz &= 2 \\ x - y - z &= m - 1 \end{aligned} \right\}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & -m \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad ;; \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -m & 2 \\ 2 & -1 & -1 & m-1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & -m \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 2m^2 + 2 - m + 2m = -2m^2 + m + 3 = 0 \quad ;; \quad 2m^2 - m - 3 = 0$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{3}{2} \\ m_2 = -1 \end{cases}$$

Para $\begin{cases} m_1 \neq \frac{3}{2} \\ m_2 \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Determinado}$

Para $m = \frac{3}{2} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 2 & -1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Para $m = \frac{3}{2}$ el rango de M' es:

$$\{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - 2 + 6 - 2 + 2 - \frac{3}{4} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}$$

Para $m = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ Para $m = -1$ el rango de M' es:

$$\{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 - 4 - 2 + 2 - 4 = -12 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}$$

Para $\left\{ m = \frac{3}{2} \text{ y } m = -1 \right\} \Rightarrow \text{Rango } M \neq \text{Rango } M' \Rightarrow \text{Incompatible}$

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y - z = 1 \\ \text{Para } m = -2 \text{ el sistema resultante es: } 2x + y + 2z = 2 \\ x - y - z = -3 \end{array} \right\}.$$

Aplicando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1 + 2 + 12 - 3 + 2 - 4}{-1 + 2 - 4 + 1 + 2 - 4} = \frac{8}{-4} = \underline{\underline{-2 = x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-2 + 6 + 2 + 2 + 6 + 2}{-4} = \frac{16}{-4} = \underline{\underline{-4 = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-3 - 2 - 4 - 1 + 2 - 12}{-4} = \frac{-20}{-4} = \underline{\underline{5 = z}}$$

4º) Obtener la ecuación del plano π que pase por el punto P(1, 1, 2) y sea paralelo a las rectas $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$.

El plano π puede determinarse por dos vectores directores, uno de cada una de las rectas, y por el punto P.

Un vector director de la recta r es $\vec{u} = (-1, 1, 2)$.

La expresión de la recta s por unas ecuaciones paramétricas es como sigue:

$$s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -2 - \lambda \\ -x + y = 1 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{x = -1 - 4\lambda}$$

$$-x + y = 1 - 3\lambda \quad ; \quad 1 + 4\lambda + y = 1 - 3\lambda \quad ; \quad \underline{y = -7\lambda} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 - 4\lambda \\ y = -7\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un vector director de la recta r es $\vec{v} = (-4, -7, 1)$.

$$\pi(P; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ;$$

$$(x-1) + 7(z-2) - 8(y-1) + 4(z-2) + 14(x-1) + (y-1) = 0 \quad ; ;$$

$$15(x-1) - 7(y-1) + 11(z-2) = 0 \quad ; \quad 15x - 15 - 7y + 7 + 11z - 22 = 0 \quad ; ;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 15x - 7y + 11z - 30 = 0}}$$
