PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

JUNIO - 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen cada opción. No mezcle cuestiones de uno u otra opción.

OPCIÓN A

1º) Hallar el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ y las rectas y = 0, x = 1 y x = 3.

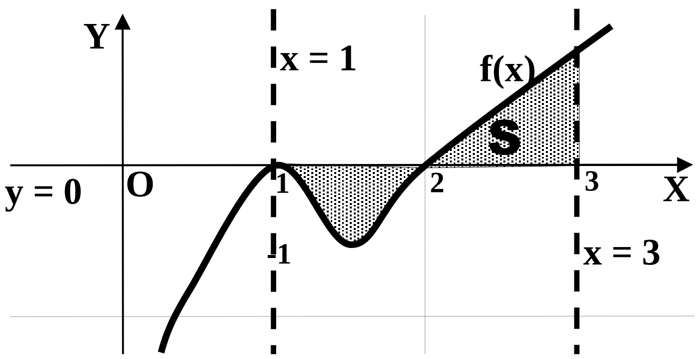
Los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son:

$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ Resolviendo por Ruffini:

	1	-4	5	-2
1		1	-3	2
	1	-3	2	$\boxed{0}$
1		1	-2	
	1	-2	$\boxed{0}$	
2		2		
	1	$\boxed{0}$		

$f(x) = (x-1)^2 \cdot (x-2) \Rightarrow \underline{x_1 = x_2 = 1}$;; $\underline{x_3 = 2}$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



$$S=\int_{2}^{1} f(x)\cdot dx+\int_{2}^{3} f(x)\cdot dx=\left[F(x)\right]_{2}^{1}+\left[F(x)\right]_{2}^{3}=F(1)-F(2)+F(3)-F(2)=$$

$$=\underline{F(1)+F(3)-2F(2)=S}\quad (*)$$

$$F(x)=\int f(x)\cdot dx=\int\left(x^{3}-4x^{2}+5x-2\right)\cdot dx=\underline{\frac{x^{4}}{4}-4\cdot\frac{x^{3}}{3}+5\cdot\frac{x^{2}}{2}-2x=F(x)}$$

Sustituyendo el valor de F(x) en (*):

$$S=\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{5}{2}-2\right)+\left(\frac{81}{4}-36+\frac{45}{2}-6\right)-2\cdot\left(4-\frac{32}{3}+10-4\right)=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{5}{2}-2+\frac{81}{4}+\frac{45}{2}-42+\frac{64}{3}-20=\frac{82}{4}+\frac{60}{3}+\frac{50}{2}-64=\frac{41}{2}+20+25-64=$$

$$=\frac{41}{2}-19=\frac{41-38}{2}=\frac{3}{2}=\underline{\underline{1'5\ u^{2}=S}}$$

****

2º) Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que dada la estructura de la empresa sólo puede optar por dos tipos de alarmas, de tipo A o de tipo B; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como la décima parte del producto entre el número de alarmas de tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas de tipo B. ¿Cuántas alarmas de cada tipo se deben instalar en la empresa para maximizar la seguridad?

Llamando S a la seguridad sería: $S = \frac{1}{10} A \cdot B^2$.

Teniendo en cuenta que A + B = 9, A = 9 – B. Sustituyendo el la fórmula anterior:

$$S = \frac{1}{10}(9 - B) \cdot B^2 = \underline{\frac{1}{10}\left(9B^2 - B^3\right) = S}$$

Para maximizar la seguridad, su derivada tiene que ser nula:

$$S'_{(B)} = \frac{1}{10}\left(18B - 3B^2\right) = \underline{\frac{3B}{10}(6 - B) = S'_{(B)}} \Rightarrow S'_{(B)} = 0 \quad \Rightarrow \underline{B_1 = 0} \;\; y \;\; \underline{B_2 = 6}$$

Como existen alarmas de los dos tipos, carece de sentido la solución B = 0, por lo tanto la solución del problema es la colocación de

<u>3 alarmas del tipo A y 6 alarmas del tipo B</u>

Justificación de que se trata de un máximo:

$$S''_{(B)} = \frac{1}{10}(18 - 6B) \Rightarrow S''_{(6)} = \frac{1}{10}(18 - 6 \cdot 6) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Máximo, \; c.q.j.}}$$

****

3º) a) ¿Para qué valores del parámetro k admite inversa la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

b) Calcular A^{-1} en función de k.

----

a)

Para que una matriz sea inversible es necesario que su determinante sea distinto de cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ;; \ 2 - k + 4 = 0 \ ;; \ \underline{\underline{k = 6}}$$

$$\underline{\underline{A \ \ es \ \ inversible \ \ \forall k \in R, \ \ k \neq 6.}}$$

b)

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ ;; \ Adj\left(A^T\right) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & k \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-k & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2k & -k & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1} = \frac{1}{(6-k)} \cdot \begin{pmatrix} 2-k & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2k & -k & 3 \end{pmatrix}, \ \forall k \neq 6}}$$

****

4º) a) Comprobar que las rectas $\begin{Bmatrix} r \equiv (x,\ y,\ z) = (1,\ 2,\ -1) + \lambda(1,\ 0,\ -1) \\ s \equiv (x,\ y,\ z) = (0,\ 3,\ 1) + \mu(-2,\ 1,\ 3) \end{Bmatrix}$ se cortan en un punto.

b) Hallar la ecuación general del plano que contiene a las rectas dadas en el apartado anterior.

----

a)

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

$$r \Rightarrow \begin{cases} Punto:\ \underline{A(1,\ 2,\ -1)} \\ Vector:\ \underline{\overrightarrow{u} = (1,\ 0,\ -1)} \end{cases} \qquad s \Rightarrow \begin{cases} Punto:\ \underline{B(0,\ 3,\ 1)} \\ Vector:\ \underline{\overrightarrow{v} = (-2,\ 1,\ 3)} \end{cases}$$

Un vector $\overrightarrow{w}$, cuyo origen es un punto de r y su extremo es un punto de s es:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 3,\ 1) - (1,\ 2,\ -1) = \underline{(-1,\ 1,\ 2) = \overrightarrow{w}}$$

Si las rectas se cortan en un punto determinan un plano en que cual tienen que estar contenidos los vectores $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\ y\ \overrightarrow{w}$. Entonces los tres vectores son coplanarios por lo cual su rango tiene que ser dos:

$$Rango\ \{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 1 - 3 = 4 - 4 = 0$$

$$Rango\ \{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{r\ y\ s\ se\ cortan\ en\ un\ punto}}$$

b)

El plano π que determinan las rectas es el siguiente:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ (z+1) + 2(y-2) + (x-1) - 3(y-2) = 0\ ;;$$

$$(x-1) - (y-2) + (z+1) = 0\ ;;\ x - 1 - y + 2 + z + 1 = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x - y + z + 2 = 0}}$$

****

OPCIÓN B

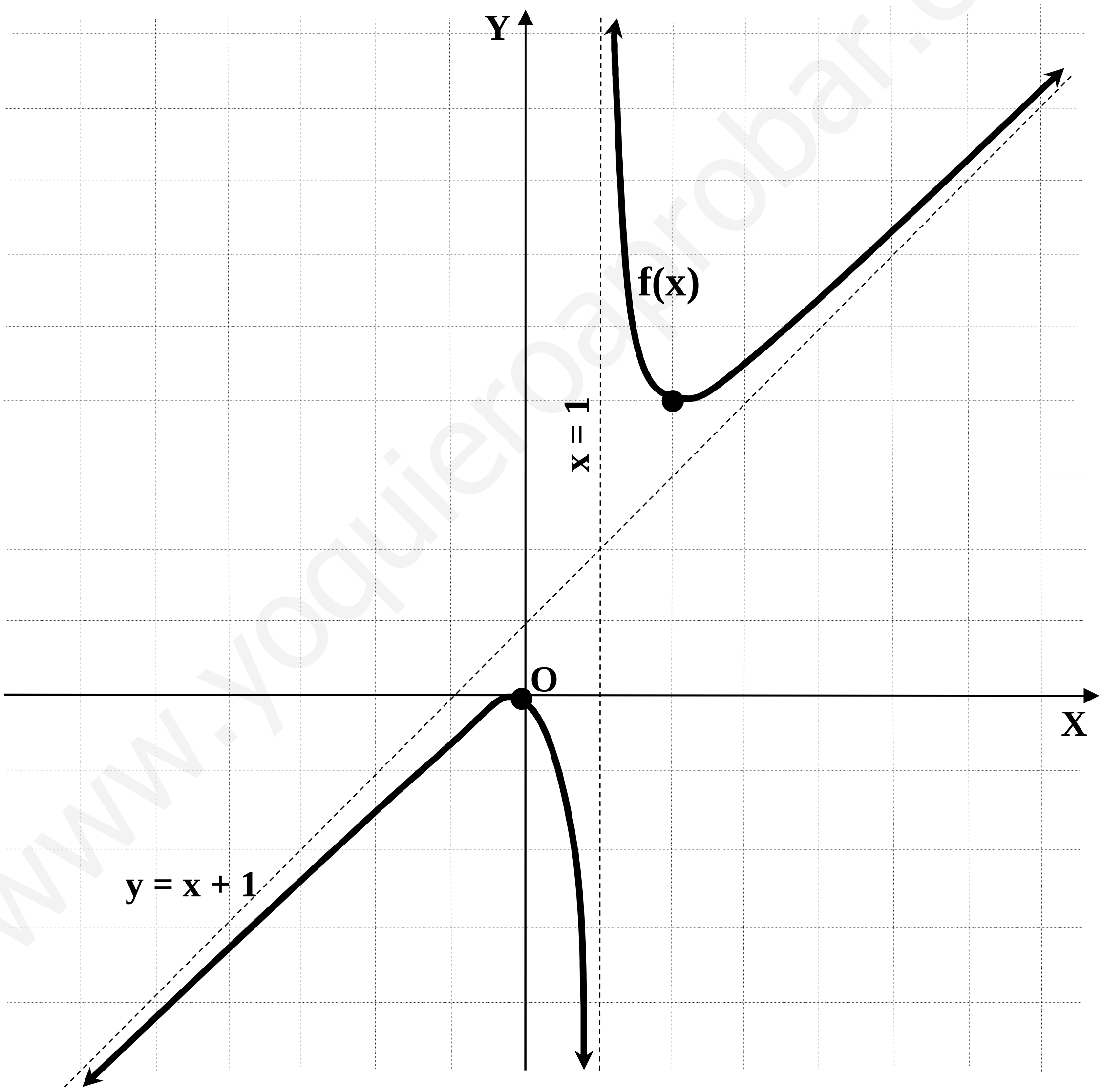
1º) Representar una función que cumpla las siguientes condiciones:

i) *Definición* $(f) = R - \{1\}$.

ii) Puntos de corte con los ejes: O(0, 0).

iii) Crecimiento: $(-\infty,\ 0] \cup (2,\ +\infty)$; Decrecimiento: $(0,\ 1) \cup (1,\ 2]$; Máximo en O(0, 0) Mínimo en P(2, 4)..

iv) Asíntota vertical: x = 1; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$. Asíntota oblicua: $y = x + 1$.



****

2º) Calcular el área encerrada entre la curva $y = e^x$ y la cuerda de la misma que tiene por extremos los puntos de abscisa 0 y 1.

Los puntos extremos del segmento son los siguientes:

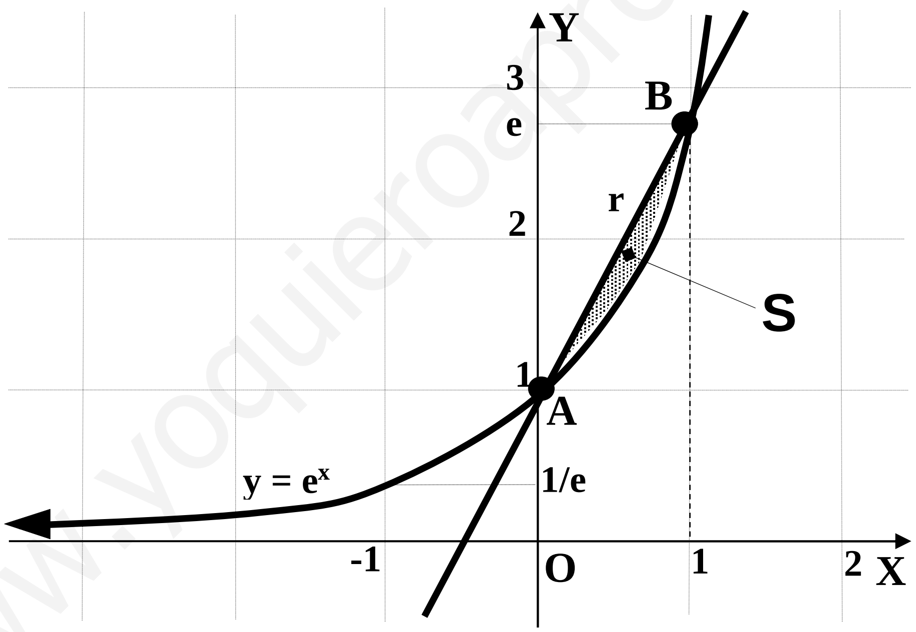
$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = e^x \end{array}\right\} \Rightarrow y = e^0 = 1 \Rightarrow \underline{A(0,\ 1)} \quad ;; \quad \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = e^x \end{array}\right\} \Rightarrow y = e^1 = e \Rightarrow \underline{B(1,\ e)}$$

La pendiente de la recta r que pasa por los puntos A y B es la misma que tiene el vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ e) - (0,\ 1) = (1,\ e-1)$.

$m = \frac{b}{a} = \frac{e-1}{1} = \underline{e - 1 = m}$ La ecuación de la recta r es la siguiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow r \equiv y - 1 = (e-1)(x-0) = (e-1)x \ ;; \ \underline{r \equiv y = (e-1)x + 1}$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



Teniendo en cuenta que las ordenadas de la curva son menores o iguales que las de la recta r, el área pedida (la sombreada en la figura) es la siguiente:

$$S = \int_0^1 (r - e^x) \cdot dx = \int_0^1 [(e-1)x + 1 - e^x] \cdot dx = \left[\frac{(e-1)x^2}{2} + x - e^x\right]_0^1 = \left[\frac{e-1}{2} + 1 - e\right] - \left[-e^0\right] =$$

$$= \frac{e-1}{2} + 1 + 1 = \frac{e-1+4}{2} = \frac{3-e}{2} \cong \underline{\underline{0'141\ u^2 = S}}$$

****

3º) a) Discutir según los valores de k el sistema: $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+ky+3z=2 \\ 2x+(2+k)y+6z=3 \end{cases}$.

b) Resolverlo para k = 0.

----

a)

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & k & 3 \\ 2 & 2+k & 6 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & k & 3 & 2 \\ 2 & 2+k & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & k & 3 \\ 2 & 2+k & 6 \end{vmatrix}=0,\ \forall k\in R \;\rightarrow\; (C_3=3\cdot C_1) \;\Rightarrow\; \underline{Rango\ M=2,\ \forall k\in R}$$

Vamos a estudiar el rango de M’, para lo cual despreciamos la primera columna:

$$Rango\ M' \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & k & 2 \\ 2 & 2+k & 3 \end{vmatrix}=3k+(2+k)+8-2k-6-2(2+k)=k+2-(2+k)=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \underline{Rango\ M'=2,\ \forall k\in R}$$

$$\underline{\underline{Rango\,M=Rango\ M'=2<n^{o}\ Incóg. \Rightarrow\ Compatible\ \ Indeterminado,\ \forall k\in R}}$$

b)

Para resolver el sistema en el caso de compatible indeterminado, parametrizamos una incógnita, por ejemplo $z=\lambda$ y resolvemos el sistema resultante de eliminar una de las ecuaciones (por ejemplo, la tercera):

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+ky+3z=2 \\ 2x+(2+k)y+6z=3 \end{cases} \Rightarrow \underline{k=0} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x+3z=2 \\ 2x+2y+6z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=1-3\lambda \\ \underline{x=2-3\lambda} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2y=1-3\lambda \;;;\; 2-3\lambda+2y=1-3\lambda \;;;\; 2y=-1 \;;;\; \underline{y=-\frac{1}{2}}$$

Dando valores a λ se obtienen las infinitas soluciones, por ejemplo:

$$\underline{\underline{\lambda=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=0 \end{cases}}} \;;;\; \underline{\underline{\lambda=1 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=1 \end{cases}}} \;;;\; \underline{\underline{\lambda=-2 \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=-2 \end{cases}}} \;\cdots\cdots$$

****

4º) a) Estudiar, según los valores del parámetro λ, la posición relativa de los siguientes planos: $\begin{cases} \lambda x - 2y + \lambda z = 0 \\ 10x - y + 5z = 0 \\ 4x + 3y - z = 0 \end{cases}$.

b) Hallar la ecuación del plano π que pasa por los puntos A(0, 1, 2), B(1, 0, 3) y $C(2,\ -1,\ 0)$.

----

a)

La matriz del sistema es $M = \begin{pmatrix} \lambda & -2 & \lambda \\ 10 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & \lambda \\ 10 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \lambda + 30\lambda - 40 + 4\lambda - 15\lambda - 20 = 20\lambda - 60 = 20(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = 3}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ \lambda \neq 3\ \ el\ \ sistema\ \ es\ \ C.\ D.;\ \ los\ \ tres\ \ planos\ \ se\ \ cor\text{tan}\ \ en\ \ un\ \ punto.}}$$

(En este caso, por ser un sistema homogéneo, el punto de corte es el origen)

Para $\lambda = 3$ el rango de M es 2 y no existen planos coincidentes:

$$\underline{\underline{Para\ \ \lambda = 3\ \ el\ \ sistema\ \ es\ \ C.\ I.;\ \ los\ \ tres\ \ planos\ \ se\ \ cor\text{tan}\ \ en\ \ una\ \ recta.}}$$

b)

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 0,\ 3) - (0,\ 1,\ 2) = (1,\ -1,\ 1)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (2,\ -1,\ 0) - (0,\ 1,\ 2) = (2,\ -2,\ -2)$$

El plano π pedido es el que tiene como vectores directores y contiene a uno cualquiera de los puntos dados, por ejemplo A:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0\ \ ;;\ \ 2x - 2(z-2) + 2(y-1) + 2(z-2) + 2x + 2(y-1) = 0\ \ ;;$$

$4x + 4(y-1) = 0$;; $x + y - 1 = 0$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x + y - 1 = 0}}$$

****