PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

SEPTIEMBRE - 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen cada opción. No mezcle cuestiones de uno u otra opción.

OPCIÓN A

1º) a) Determinar la abscisa de los puntos en los que la recta tangente a la función dada por $f(x) = L\frac{x+1}{x-1}$ es paralela a la recta de ecuación $r \equiv 2x + 3y = 4$.

b) Obtener la ecuación de la recta tangente a la función dada en el apartado anterior en el punto de abscisa x = 3.

----

a)

$$f(x) = L\frac{x+1}{x-1} = L(x+1) - L(x-1) \;;;\; f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x-1}{x^2-1} = \frac{-2}{x^2-1} = f'(x)$$

$$r \equiv 2x + 3y = 4 \;;;\; 3y = -2x + 4 \;;;\; y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

$$f'(x) = m = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{-2}{x^2-1} = -\frac{2}{3} \;;;\; x^2 - 1 = 3 \;;;\; x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2 \;;;\; x_2 = -2$$

b)

$$f(x) = L\frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f(3) = L\frac{3+1}{3-1} = L\frac{4}{2} = L2 \Rightarrow P(3,\ L2)$$

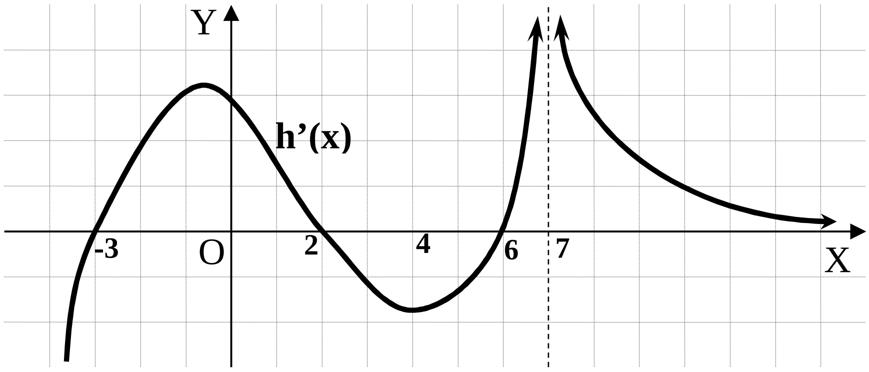
$$m = f'(3) = \frac{-2}{3^2-1} = \frac{-2}{9-1} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} = m \;;;\; y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - L2 = -\frac{1}{4}(x-3) \;;;$$

$$4y - 4L2 = -x + 4 \;;;$$

$$t \equiv x + 4y - 4(L2+1) = 0$$

****

2º) Dada la gráfica de h'(x), deducir la monotonía y extremos relativos de h(x), así como la curvatura y sus puntos de inflexión, explicando cómo se hace.



Monotonía (crecimiento y decre.): $\begin{cases} \underline{\underline{Creciente: \ (-3,\ 2)\cup(6,\ 7)\cup(7,\ +\infty)}} \\ \underline{\underline{Decreciente: \ (-\infty,\ -3)\cup(2,\ 6)}} \end{cases}$

Una función tiene un máximo relativo cuando la derivada pasa de ser creciente a decreciente y tiene un mínimo relativo cuando pasa de ser decreciente a creciente.

Máximos y mínimos relativos: $\begin{cases} \underline{\underline{Máx.: \ [2,\ h(2)]}} \\ \underline{\underline{Mín: \ [-3,\ f(-3)];\ Mín: [6,\ f(6)]}} \end{cases}$

Una función es convexa $(\cup)$ en un intervalo cuando es positiva su segunda derivada, es decir, cuando es creciente la primera derivada y es cóncava $(\cap)$ en un intervalo cuando es negativa la segunda derivada, o sea, cuando sea decreciente la primera derivada.

Concavidad y convexidad: $\begin{cases} \underline{\underline{Convexidad\ \ (\cup).: \ (-\infty,\ -\frac{1}{2})\cup(4,\ 7)}} \\ \underline{\underline{Concavidad\ \ (\cap): (-\frac{1}{2},\ 4)\cup(7,\ +\infty)}} \end{cases}$

Una función tiene un punto de inflexión cuando pasa de ser cóncava a convexa o viceversa.

Puntos de Inflexión: $P[-\frac{1}{2},\ f(-\frac{1}{2})]\ y\ Q[4,\ f(4)]$

****

3º) Calcular el valor de $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, que verifica AX – B = C, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot X - B = C \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} x+z \\ -x+z \\ 2x+3y-2z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \;;;$$

$$\begin{pmatrix} x+z-2 \\ -x+z \\ 2x+3y-2z+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x+z-2=1 \\ -x+z=1 \\ 2x+3y-2z+2=-3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+z=3 \\ -x+z=1 \\ 2x+3y-2z=-5 \end{array}\right\}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones: $2z=4$;; $\underline{z=2}$.

$x+z=3 \rightarrow x+2=3$;; $\underline{x=1}$;; $2x+3y-2z=-5 \rightarrow 2+3y-4=-5$;; $3y=-3$;; $\underline{y=-1}$

$$\underline{\underline{Solución:\; X=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

****

4º) Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$, hallar la ecuación del plano π que contiene a ésta recta y pasa por el punto P(0, -2, 1).

Un punto y un vector director de la recta r son $A(1,\ -1,\ 2)$ y $\overrightarrow{u} = (-2,\ 3,\ 1)$.

El vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AP}$ también pertenece al plano π pedido.

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PA} = A - P = (1,\ -1,\ 2) - (0,\ -2,\ 1) = (1,\ 1,\ 1)$.

El plano π puede determinarse tomando como vectores directores a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y que pasa por el punto P:

$$\pi(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 3x + (y+2) - 2(z-1) - 3(z-1) - x + 2(y+2) = 0 \ ;;$$

$$2x + 3(y+2) - 5(z-1) = 0 \ ;;\ 2x + 3y + 6 - 5z + 5 = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x + 3y - 5z + 11 = 0}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Hallar la función f(x) tal que $f''(x)=\frac{1}{x^2}$, $f(1)=0$ y $f(e)=-1$.

$$f'(x)=\int f''(x)\cdot dx=\int\frac{1}{x^2}\cdot dx=\int x^{-2}\cdot dx=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C_1=-x^{-1}+C_1=\underline{-\frac{1}{x}+C_1=f'(x)}$$

$$f(x)=\int f'(x)\cdot dx=\int\left(-\frac{1}{x}+C_1\right)\cdot dx=-\int\frac{1}{x}\cdot dx+C_1\cdot\int dx=\underline{-Lx+C_1x+C_2=f(x)}$$

$$f(1)=0\ \Rightarrow\ -L1+C_1\cdot 1+C_2=0\ ;;\ -0+C_1+C_2=0\ ;;\ \underline{C_1+C_2=0}\qquad (1)$$

$$f(e)=-1\ \Rightarrow\ -Le+C_1\cdot e+C_2=-1\ ;;\ -1+eC_1+C_2=-1\ ;;\ \underline{eC_1+C_2=0}\qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} C_1+C_2=0 \\ eC_1+C_2=0 \end{array}\right\}\begin{array}{l}\to C_2=-C_1 \\ \Rightarrow eC_1-C_1=0\ ;;\ C_1(e-1)=0\ \Rightarrow\ \underline{C_1=0}\ ;;\ C_2=-C_1=\underline{0=C_2}\end{array}$$

$$\underline{\underline{f(x)=-L|x|}}$$

****

2º) Dada la función $f(x)=\frac{2}{x^2-1}$, determinar razonadamente:

a) El dominio.

b) Los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

c) Las ecuaciones de sus asíntotas, si es que las tiene.

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos.

e) Su representación gráfica.

----

a) $x^2-1=0\ ;;\ x^2=1\ \rightarrow\ \underline{x_1=1}\ ;;\ \underline{x_2=-1}\ \rightarrow\ \underline{\underline{D(f)\Rightarrow R-\{1,\ -1\}}}$

b)

$$Eje\ \ X\rightarrow y=f(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{1}{x^2-1}=0\rightarrow x\notin R\ \Rightarrow\ \underline{\underline{No\ \ tiene}}$$

$$Eje\ \ Y\rightarrow x=0\ \rightarrow\ f(0)=\frac{1}{0^2-1}=-1\ \Rightarrow\ \underline{\underline{A(0,\ -1)}}$$

c)

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-1}=\underline{\underline{0=y}}\ \ (Eje\ \ X)$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$x^2-1=0\ ;;\ x^2=1\ \Rightarrow\ \underline{\underline{x_1=1}}\ ;;\ \underline{\underline{x_2=-1}}$$

Oblicuas: $\underline{\underline{\text{No tiene.}}}$

(Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

d)

$$f(x)=\frac{2}{x^2-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{-2\cdot(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-4\cdot(x^2-1)^2+4x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=\frac{-4\cdot(x^2-1)+16x}{(x^2-1)^3}=\underline{\frac{-4(x^2-4x+1)}{(x^2-1)^3}=f''(x)}$$

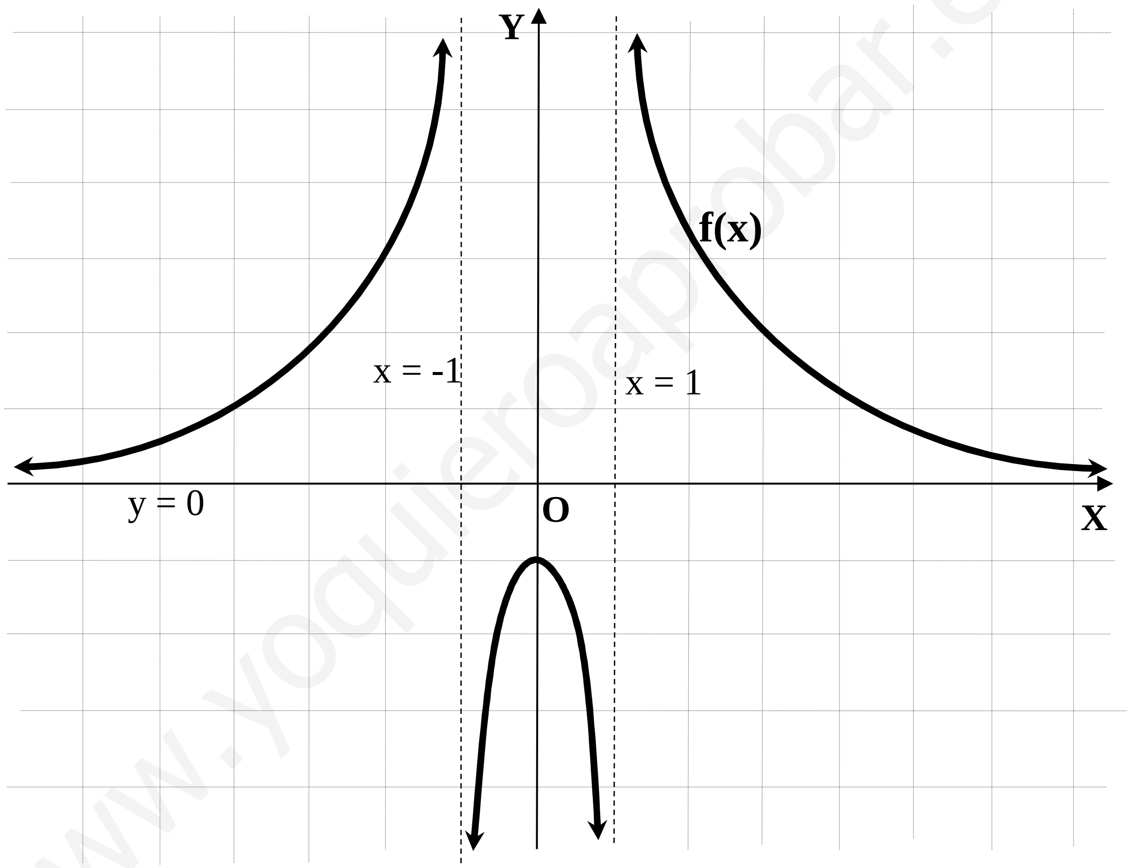
$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}=0 \Rightarrow \underline{x=0}$$

$$f''(0)=\frac{-4(1)}{(-1)^2}=\frac{-4}{1}=-4<0 \;\Rightarrow\; \textit{Máximo relativo para } x=0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{Máx.}(0,\ -1)}}$$

$$f'(x)>0 \Rightarrow x<0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{Creciente}: (-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 0)}}$$

$$f'(x)<0 \Rightarrow x>0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{Decreciente}: (0,\ 1)\cup(1,\ +\infty)}}$$

e)



****

3º) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ y & -1 & 2 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$, hallar sin desarrollar el valor de $\begin{vmatrix} z & 3z & z+2 \\ x & 3x+1 & x+2 \\ y & 3y-1 & y+2 \end{vmatrix}$ explicando las propiedades de los determinantes que se utilizan.

$$\begin{vmatrix} z & 3z & z+2 \\ x & 3x+1 & x+2 \\ y & 3y-1 & y+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3x & x+2 \\ y & 3y-1 & y+2 \\ z & 3z+1 & z+2 \end{vmatrix}$$

Si se cambian entre sí dos filas o dos columnas, el valor del determinante cambia de signo; como se cambian entre sí dos veces, se mantiene el signo más.

$$\begin{vmatrix} x & 3x & x+2 \\ y & 3y-1 & y+2 \\ z & 3z+1 & z+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3x & x+2 \\ y & 3y & y+2 \\ z & 3z & z+2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & x+2 \\ y & -1 & y+2 \\ z & 1 & z+2 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} x & 0 & x+2 \\ y & -1 & y+2 \\ z & 1 & z+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ y & -1 & y \\ z & 1 & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ y & -1 & 2 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ y & -1 & 2 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\underline{7}}$$

En las operaciones anteriores se han empleado las dos siguientes propiedades de los determinantes:

.- Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales, su valor es cero.

.- Si todos los elementos de una fila o columna se descomponen en dos o más sumandos, entonces el determinante es igual a la suma de los determinantes que tienen en ese fila o columna el primero y segundo sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos que el determinante inicial.

****

4º) Estudiar la posición relativa del plano $\pi \equiv 5x + \lambda y - 2z + 1 = 0$ y la recta r de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases}$ según los valores del parámetro λ.

Vamos a realizar el estudio de forma vectorial.

En primer lugar expresamos la recta r por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \mu} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ x - y = -1 - 2\mu \end{array} \right\} \left. \begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ -x + y = 1 + 2\mu \end{array} \right\} \rightarrow \underline{x = 2 + 2\mu}$$

$$2x - y = 1 \Rightarrow y = 2x - 1 = 4 + 4\mu - 1 = \underline{3 + 4\mu = y} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\mu \\ y = 3 + 4\mu \\ z = \mu \end{cases}}$$

Un punto y un vector director de r son P(2, 3, 0) y $\overrightarrow{v} = (2,\ 4,\ 1)$.

El vector normal del plano π *es* $\overrightarrow{n} = (5,\ \lambda,\ -2)$.

La recta r y el plano π son paralelos si el producto escalar del vector director de la recta y el normal al plano es cero:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Rightarrow (2,\ 4,\ 1) \cdot (5,\ \lambda,\ -2) = 10 + 4\lambda - 2 = 0 \ ;;\ 8 = 4\lambda \ ;;\ \underline{\underline{\lambda = -2}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ \lambda \neq -2\ \ la\ \ recta\ \ y\ \ el\ \ plano\ \ son\ \ secantes}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ \lambda = -2\ \ la\ \ recta\ \ y\ \ el\ \ plano\ \ son\ \ paralelos}}$$

Para saber, en el caso de ser paralelos, si el plano contiene a la recta, debe contener a todos sus puntos, por lo tanto, también al punto P(2, 3, 0) tendría que satisfacer su ecuación:

$$Para\ \ \lambda = -2 \rightarrow \pi \equiv 5x - 2y - 2z + 1 = 0$$

$$P(2,\ 3,\ 0) \Rightarrow 5 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 1 = 10 - 6 - 0 + 1 = 5 \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{P \notin \pi}}$$

****