PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

SEPTIEMBRE - 2006

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen cada opción. No mezcle cuestiones de uno u otra opción.

OPCIÓN A

1º) Resolver: $I = \int \frac{2x}{x^3 - 3x^2 - x + 3} \cdot dx$.

Descomponiendo factorialmente el denominador por Ruffini:

	1	-3	-1	3
1		1	-2	-3
	1	-2	-3	$\boxed{0}$
-1		-1	3	
	1	-3	$\boxed{0}$	
3		3		
	1	$\boxed{0}$		

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-3)$$

$$\frac{2x}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3} =$$

$$= \frac{A(x+1)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x^2-1)}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{A(x^2-2x-3) + B(x^2-4x+3) + C(x^2-1)}{x^3 - 3x^2 - x + 3} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (-2A-4B)x + (-3A+3B-C)}{x^3 - 3x^2 - x + 3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} A+B+C=0 \\ -2A-4B=2 \\ -3A+3B-C=0 \end{array} \right\} \begin{array}{r} \rightarrow C=-A-B \\ -2A-4B=2 \\ -3A+3B+A+B=0 \end{array} \Bigg\} \begin{array}{r} -2A-4B=2 \\ -2A+4B=0 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow -4A=2 \;\;;;\;\; \underline{A=-\frac{1}{2}}$$

$$-2A+4B=0 \;\;;;\;\; 1+4B=0 \;\;;;\;\; \underline{B=-\frac{1}{4}} \;\;;;\;\; C=-A-B=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2+1}{4}=\underline{\frac{3}{4}=C}$$

Sustituyendo los valores de A, B y C queda:

$$\frac{2x}{x^3-3x^2-x+3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-3}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-3}$$

Sustituyendo en la integral:

$$I=\int\frac{2x}{x^3-3x^2-x+3}\cdot dx=-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{x-1}\cdot dx-\frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{x+1}\cdot dx+\frac{3}{4}\cdot\int\frac{1}{x-3}\cdot dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot L|x-1|-\frac{1}{4}\cdot L|x+1|+\frac{3}{4}\cdot L|x-3|+K=\underline{\underline{\frac{1}{4}\cdot L\left|\frac{(x-3)^3}{(x-1)^2(x+1)}\right|+K=I}}$$

****

2º) La potencia f(x) en watios consumida por cierto aparato eléctrico, en función de su resistencia (x) en ohmios viene dada por la expresión $f(x)=\frac{4x}{(x+12)^2}$. Hallar la potencia máxima y el correspondiente valor de x.

La potencia será máxima cuando su derivada sea cero:

$$f'(x)=\frac{4\cdot(x+12)^2-4x\cdot 2\cdot(x+12)\cdot 1}{(x+12)^4}=\frac{4\cdot(x+12)-8x}{(x+12)^3}=\frac{4x+48-8x}{(x+12)^3}=\frac{48-4x}{(x+12)^3}=$$

$$=\underline{\frac{4(12-x)}{(x+12)^3}=f'(x)}$$

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{4(12-x)}{(x+12)^3}=0\ \ ;;\ \ 12-x=0\ \ ;;\ \ \underline{x=12}$$

El valor de la potencia máxima es el siguiente:

$$f(12)=\frac{4\cdot 12}{(12+12)^2}=\frac{4\cdot 12}{(2\cdot 12)^2}=\frac{4\cdot 12}{4\cdot 12^2}=\underline{\frac{1}{12}=f(12)}$$

$$\underline{\underline{\textit{La potencia máxima es } \frac{1}{12} \textit{ watios y la resistencia son } 12\ \Omega}}$$

Para justificar que se trata de un máximo, la segunda derivada tiene que ser negativa para el valor de x encontrado:

$$f''(x)=\frac{-4\cdot(x+12)^3-4(12-x)\cdot 3\cdot(x+12)^2\cdot 1}{(x+12)^6}=\frac{-4\cdot(x+12)-12(12-x)}{(x+12)^4}=$$

$$=\frac{-4x-48-144+12x}{(x+12)^4}=\underline{\frac{8x-192}{(x+12)^4}=f''(x)}$$

$$f''(12)=\frac{8\cdot 12-192}{(12+12)^4}=\frac{96-192}{(2\cdot 12)^4}=\frac{-96}{+}<0\ \Rightarrow\ \underline{\textit{Máximo, c.q.j.}}$$

****

3º) Resolver el siguiente sistema matricial: $\left.\begin{array}{l} 2A+3B=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \\ 5A-2B=\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 8 & 18 \end{pmatrix} \end{array}\right\}.$

Resolviendo por el método de reducción y teniendo en cuenta que el producto de una matriz por un número es la matriz que resulta de multiplicar el número real por todos y cada uno de sus elementos, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} 4A+6B=\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 14 & 22 \end{pmatrix} \\ 15A-6B=\begin{pmatrix} 30 & 3 \\ 24 & 54 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 19A=\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 14 & 22 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 30 & 3 \\ 24 & 54 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 38 & 19 \\ 38 & 76 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}}$$

$$\left.\begin{array}{l} 10A+15B=\begin{pmatrix} 20 & 40 \\ 35 & 55 \end{pmatrix} \\ -10A+4B=\begin{pmatrix} -20 & -2 \\ -16 & -36 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 19B=\begin{pmatrix} 20 & 40 \\ 35 & 55 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -20 & -2 \\ -16 & -36 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 38 \\ 19 & 19 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

****

4º) Estudiar la posición relativa de las rectas $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda - 8 \\ z = -\lambda - 1 \end{cases}$. En caso de que se corten en un punto, hallar las coordenadas del mismo.

Vamos a estudiar la posición relativa mediante vectores.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_r} = (-1,\ 2,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (-1,\ 1,\ -1)$, que son linealmente independientes por cumplirse que $\frac{-1}{-1} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1}$, lo cual significa que las rectas se cortan o se cruzan.

Para diferenciar el caso se determina un vector $\overrightarrow{w}$ que tenga como origen un punto de la recta r y como extremo un punto de la recta s, cosa que no es necesaria en el caso que nos ocupa, puesto que el punto A(1, -2, 0) pertenece a las dos rectas, lo que significa que

Las rectas r y s se cortan en el punto A(1, -2, 0).

****

OPCIÓN B

1º) ¿Para qué valor de a la recta $ax + y = L3$ es tangente a la curva $f(x) = L\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$ en el punto de abscisa x = 0?

El punto de tangencia es $f(0) = L\left(\frac{0+2}{0+1}\right) = L2 \Rightarrow \underline{P(0,\ L2)}$.

La pendiente de la recta $y = -ax + L3$ es m = -a .

La pendiente a una función en un punto es igual que el valor de su derivada en ese punto. Teniendo en cuenta que $f(x) = L\left(\frac{x+2}{x+1}\right) = L(x+2) - L(x+1)$, su derivada es:

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x-2}{(x+2)(x+1)} = \frac{-1}{(x+2)(x+1)} \Rightarrow m = f'(0) = \frac{-1}{2 \cdot 1} = \underline{-\frac{1}{2} = m}.$$

Como la pendiente es la misma, resulta:

$$-a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{1}{2}}}$$

****

2º) Calcular: $I = \int_0^1 \left(x^2 + 5\right) \cdot e^x \cdot dx$.

El valor de la integral indefinida $A = \int \left(x^2 + 5\right) \cdot e^x \cdot dx$, sin considerar el valor de la constante, se resuelve por el método de “por partes”, es el siguiente:

$$A = \int \left(x^2 + 5\right) \cdot e^x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 + 5 \rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^x \cdot dx \rightarrow v = e^x \end{array} \right\} \Rightarrow A = \left(x^2 + 5\right) \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x \cdot dx =$$

$$= \underline{\left(x^2 + 5\right) \cdot e^x - 2A_1 = A} \qquad (*)$$

$$A_1 = \int x \cdot e^x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x \cdot dx \rightarrow v = e^x \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 = x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx = x \cdot e^x - e^x =$$

$$= \underline{e^x \left(x - 1\right) = A_1}$$

Sustituyendo el valor obtenido de A_1 en (*), resulta:

$$A = \left(x^2 + 5\right) \cdot e^x - 2A_1 = \left(x^2 + 5\right) \cdot e^x - 2e^x \left(x - 1\right) = \underline{e^x \left(x^2 - 2x + 7\right) = A}$$

Finalmente, el valor de la integral definida pedida es el siguiente:

$$I = \int_0^1 \left(x^2 + 5\right) \cdot e^x \cdot dx = \left[e^x \left(x^2 - 2x + 7\right)\right]_0^1 = \left[e^1 \left(1^2 - 2 \cdot 1 + 7\right)\right] - \left[e^0 \left(0^2 - 2 \cdot 0 + 7\right)\right] =$$

$$= e \cdot \left(1 - 2 + 7\right) - 1 \cdot \left(0 - 0 + 7\right) = \underline{\underline{\left(6e - 7\right) u^2 = I}}$$

****

3º) Hallar los valores de k para que la matriz $M = \begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -k \end{pmatrix}$:

a) No tenga inversa.

b) Tenga de rango 3.

----

a)

Para que una matriz no tenga inversa (sea inversible) es necesario que el valor de su determinante sea cero.

Para hallar el valor del determinante de la matriz M restamos a cada columna la anterior:

$$|M| = \begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k & 4+k & 1 & 1 \\ -k & 1+k & 1 & 1 \\ -k & 0 & k & -1 \\ -k & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +k \cdot \begin{vmatrix} 4+k & 1 & 1 \\ 1+k & 1 & 1 \\ 0 & k & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= k \cdot [-4-k+k(1+k)-k(4+k)+(1+k)] = k \cdot (-4-k+k+k^2-4k-k^2+1+k) =$$

$$= k \cdot (-4-4k+1+k) = -k \cdot (3k+3) = -3k \cdot (k+1) = 0 \Rightarrow \underline{k_1 = 0} \;;;\; \underline{k_2 = -1}$$

<u>La matriz M es inversible para k = 0 y k = -1.</u>

b)

Para que el rango de la matriz M sea 3 es necesario que su determinante sea cero y que, al menos exista un menor complementario de orden tres distinto de cero.

Del apartado anterior sabemos que el determinante de M es nula para los valores k = 0 y k = 1; para estos valores el determinante de M es:

$$Para\ \ k = 0 \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8+5 = -3 \neq 0$$

$$Para \;\; k=-1 \Rightarrow \left|M\right| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_2 - C_1\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot (3-2+1-2) = -3 \cdot 0 = 0$$

<u>La matriz M tiene rango 3 para k = -1.</u>

****

4º) Hallar la ecuación implícita del plano π que pasa por el punto A(0, -1, 0) y es paralelo a las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda - 3 \end{cases}$.

El plano π pedido contiene al punto A(0, -1, 0) y tiene como vectores directores a los vectores directores de las rectas, que son $\overrightarrow{v_r} = (-1,\ -1,\ 0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (-1,\ 0,\ -1)$.

La expresión implícita de π es la siguiente:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ \begin{vmatrix} x & y+1 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv x - z - y - 1 = 0}}$$

****