PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS

JUNIO – 2011 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro preguntas que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones, el tribunal podrá anular su examen.

En el desarrollo de cada respuesta, detalle y explique los procedimientos empleados en la misma. Se califica todo.

OPCIÓN A

1º) Estudiar la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} 1+sen^2 x, & si \quad x \le 0 \\ \sqrt{x^3+1}, & si \quad 0<x<1 \\ e^{x^2-1}, & si \quad x \ge 1 \end{cases}$ en todo su dominio, dando expresiones de la derivada donde exista.

Para que una función sea derivable en su dominio tiene que ser continua en el mismo. La función f(x) es continua en su dominio, que es R, excepto para los valores $x=0$ y $x=1$, cuya continuidad es dudosa.

Para que la función f(x) sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(1+sen^2 x\right) = f(0) = \underline{1} \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^3+1} = \underline{1} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{f(x) \text{ es continua para } x=0.}$$

Veamos ahora la continuidad para x = 1.

Para que la función f(x) sea continua para x = 1 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x^3+1} = \underline{\sqrt{2}} \\ \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} e^{x^2-1} = f(1) = \underline{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f(x) \text{ no es continua para } x = 1}.$$

La función f(x) no es derivable para x = 1.

Vamos a estudiar la derivabilidad para x = 0.

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} 2sen\ x \cdot \cos x = sen(2x), & si\ \ x \le 0 \\ \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}, & si\ \ 0 < x < 1 \\ 2x \cdot e^{x^2-1}, & si\ \ x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow f'(1) = \begin{cases} \dfrac{3}{2\sqrt{2}} & si\ \ 0 < x < 1 \\ 2 & si\ \ x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\dfrac{3}{2\sqrt{2}} \ne 2}}$$

La función no es derivable en x = 0

$$\underline{\underline{f'(x) = \begin{cases} 2sen\ x \cdot \cos x = sen(2x), & si\ \ x \le 0 \\ \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}, & si\ \ 0 < x < 1 \\ 2x \cdot e^{x^2-1}, & si\ \ x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \forall x \in R,\ \{x \ne 0,\ x \ne 1\}}}$$

Otra expresión de la derivada de f(x) es:

$$\underline{\underline{f'(x) = \begin{cases} 2sen\ x \cdot \cos x = sen(2x), & si\ \ x < 0 \\ \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}, & si\ \ 0 < x < 1 \\ 2x \cdot e^{x^2-1}, & si\ \ x > 1 \end{cases}}}$$

****

2º) Calcular las siguientes integrales: a) $I_1 = \int x \cdot L\,x \cdot dx$ b) $I_2 = \int_0^2 \frac{3}{x^2+4} \cdot dx$.

----

a)

$$I_1 = \int x \cdot L\,x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = L\,x \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ x \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow I_1 = L\,x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot L\,x - \frac{1}{2} \int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot L\,x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \underline{\underline{\frac{x^2}{4}(2\,L\,x - 1) + C = I_1}}.$$

b)

$$I_2 = \int_0^2 \frac{3}{x^2+4} \cdot dx = \frac{3}{4} \int_0^2 \frac{1}{\frac{x^2}{4}+1} \cdot dx = \frac{3}{4} \int_0^2 \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c|c} \frac{x}{2} = t & x = 2 \rightarrow t = 1 \\ dx = 2dt & x = 0 \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} \cdot 2dt = \frac{3}{2} \cdot [arc\ tag\ t]_0^1 = \frac{3}{2} \cdot (art\ tag\ 1 - arc\ tag\ 0) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \underline{\underline{\frac{3\pi}{8} = I_2}}.$$

****

3º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$, se pide:

a) Resolver el sistema: $\begin{cases}2X-3Y=A\\ 3X+4Y=B\end{cases}$

b) Calcular el rango de M = A · B.

----

a)

$$\left.\begin{cases}2X-3Y=A\\ 3X+4Y=B\end{cases}\Rightarrow \begin{array}{r}8X-12Y=4A\\ 9X+4Y=3B\end{array}\right\}\Rightarrow 17X=4A+3B\ ;;\ \underline{X=\frac{1}{17}\cdot(4A+3B)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=\frac{1}{17}\cdot\left[4\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{17}\cdot\left[\begin{pmatrix}-4 & 0 & 4\\ 12 & 4 & -4\\ 8 & 4 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & -3 & 3\\ 0 & 3 & 9\\ 6 & -6 & 3\end{pmatrix}\right]=$$

$$\underline{\underline{=\frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3 & 7\\ 12 & 7 & 5\\ 14 & -2 & 3\end{pmatrix}=X}}.$$

$$\left.\begin{cases}2X-3Y=A\\ 3X+4Y=B\end{cases}\Rightarrow \begin{array}{r}-6X+9Y=-3A\\ 6X+8Y=2B\end{array}\right\}\Rightarrow 17Y=-3A+2B\ ;;\ \underline{Y=\frac{1}{17}\cdot(-3A+2B)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y=\frac{1}{17}\cdot\left[-3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{17}\cdot\left[\begin{pmatrix}3 & 0 & -3\\ -9 & -3 & 3\\ -6 & -3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 6\\ 4 & -4 & 2\end{pmatrix}\right]=$$

$$\underline{\underline{=\frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix}7 & -2 & -1\\ -9 & -1 & 9\\ -2 & -7 & 2\end{pmatrix}=Y}}.$$

b)

$$M=A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+0+2 & 1+0-2 & -1+0+1\\ 6+0-2 & -3+1+2 & 3+3-1\\ 4+0+0 & -2+1-0 & 2+3+0\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 4 & 0 & 5\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}}.$$

Por ser $\begin{vmatrix}0 & -1\\ 4 & 0\end{vmatrix}=4\neq 0\Rightarrow \underline{2\leq Rango\ \ M\leq 3}$.

$$\left| M \right| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -20 + 20 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Rango \;\; M = 2}}.$$

****

4º) Dada la recta $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ y el punto P(1, 2, 3).

a) Hallar la ecuación en forma general del plano π que los contiene.

b) Hallar las ecuaciones, en forma continua, en forma de paramétricas y como intersección de dos planos, correspondientes a la recta s que pasa por P y es perpendicular a π.

----

a)

Un punto y un vector director de r son A(2, 0, 1) y $\overrightarrow{u} = (3,\ -1,\ 2)$.

Los puntos A y P determinan el vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PA} = A - P = (1,\ -2,\ -2)$.

El plano π lo determinan los vectores $\overrightarrow{u}\ \ y\ \ \overrightarrow{v}$ y el punto P(1, 2, 3):

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0\ ;;$$

$$2(x-1)+2(y-2)-6(z-3)+(z-3)+4(x-1)+6(y-2)=0\ ;;\ 6(x-1)+8(y-2)-5(z-3)=0\ ;;$$

$$6x-6+8y-16-5z+15=0\ ;;\ \underline{\underline{\pi \equiv 6x+8y-5z-7=0}}.$$

b)

El plano π tiene como vector normal $\overrightarrow{n} = (6,\ 8,\ -5)$.

La recta s que pasa por P(1, 2, 3) tiene como vector director a $\overrightarrow{n} = (6,\ 8,\ -5)$.

La expresión de s por unas ecuaciones continuas es: $\underline{\underline{s \equiv \frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-3}{-5}}}$.

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{\underline{s \equiv \begin{cases} x = 1+6\lambda \\ y = 2+8\lambda \\ z = 3-5\lambda \end{cases}}}$.

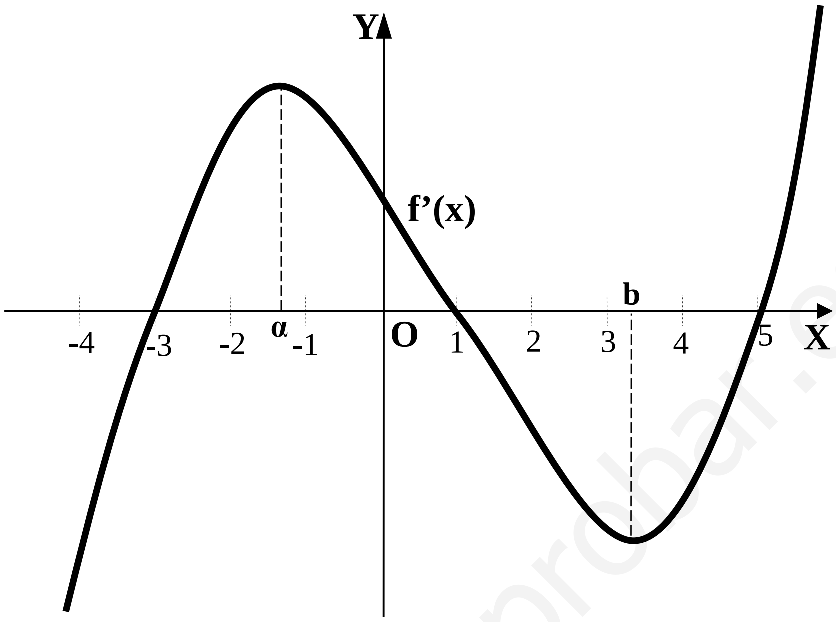
La expresión de s como intersección de dos planos es: $s \equiv \begin{cases} 4x-4 = 3y-6 \\ -5x+5 = 6z-18 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \underline{\underline{s \equiv \begin{cases} 4x-3y+2=0 \\ 5x+6z-23=0 \end{cases}}}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Indicar, para una función f(x), sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, los valores de x que corresponden a sus máximos y mínimos relativos, así como sus intervalos de concavidad y convexidad, sabiendo que su función derivada tiene la gráfica de la figura: (α = -1'22 y b = 3'33).



Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$\underline{\underline{Crecimiento: \ (-3,\ 1) \cup (5,\ +\infty)}}$$

$$\underline{\underline{Decrecimiento: \ (-\infty,\ -3) \cup (1,\ 5)}}$$

Una función tiene un máximo relativo cuando pasa de ser creciente a decreciente, es decir, cuando la derivada pasa de ser positiva a negativa (y se anula en el máximo).

Una función tiene un mínimo relativo cuando pasa de ser decreciente a creciente, es decir, cuando la derivada pasa de ser negativa a positiva (y se anula en el mínimo).

La función f(x) tiene un máximo relativo para x = 1.

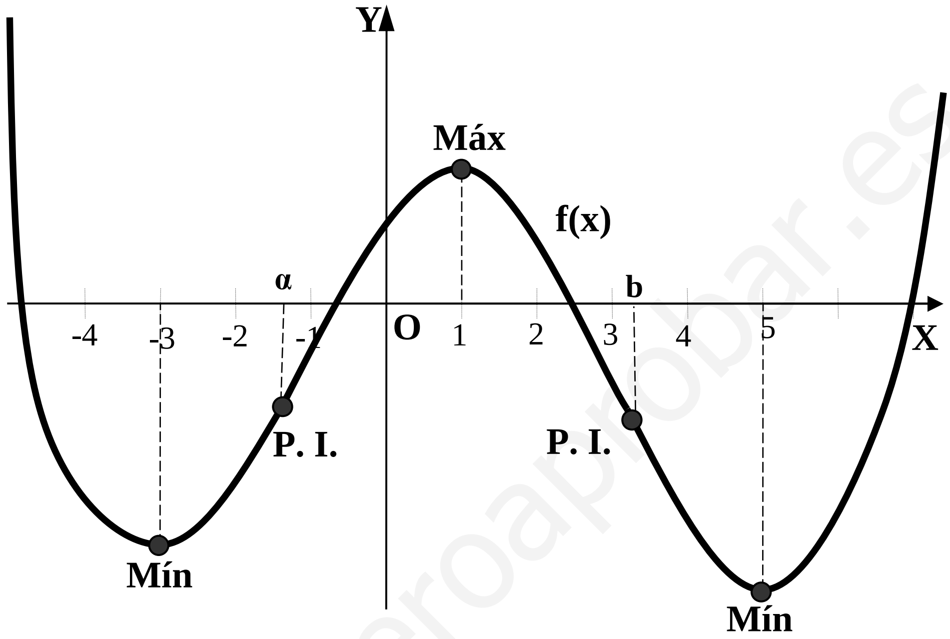
La función f(x) tiene mínimos relativos para x = -3 y para x = 5.

Una función es cóncava $(\cap)$ en el entorno de un máximo, es decir, cuando su derivada pasa de ser positiva a negativa, o sea, cuando su derivada decrece, por lo tanto, su segunda derivada tiene que ser negativa.

Una función es convexa $(\cup)$ en el entorno de un mínimo, es decir, cuando su derivada pasa de ser negativa a positiva, o sea, cuando su derivada crece, por lo tanto, su segunda derivada tiene que ser positiva.

Una función tiene un punto de inflexión cuando pasa de ser cóncava $(\cap)$ a convexa $(\cup)$ o viceversa, es decir, cuando se anula su segunda derivada: cuando la primera derivada tiene un máximo o un mínimo. En el caso que nos ocupa la función tiene puntos de inflexión para los valores de x: α = -1’22 y b = 3’33.

Con los razonamientos anteriores se puede esbozar la función f(x), que es de la forma que indica la figura siguiente.



Con los razonamientos anteriores y de la observación de la figura se deducen los periodos de concavidad y convexidad, que son los siguientes:

$$\underline{\underline{Convexidad\ (\cup):\ (-\infty,\ -1'22)\cup(3'33,\ +\infty)}}$$

$$\underline{\underline{Concavidad\ (\cap):\ (-1'22,\ 3'33)}}$$

****

2º) Dadas las funciones $y=-x^2+4x$ e $y=2x^2-2x$.

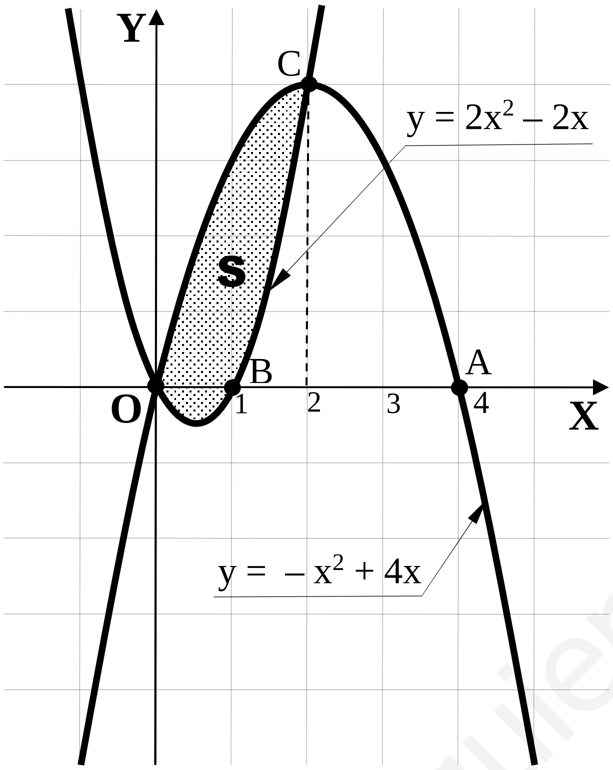
a) Representar la región que determinan sus gráficas.

b) Calcular el área de dicha región.

----

a)

Los puntos de corte de cada función con el eje de abscisas son:



$$y=-x^2+4x=0 \Rightarrow -x(x-4)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ x_2=4 \rightarrow \underline{A(4,\ 0)} \end{cases}$$

$$y=2x^2-2x=0 \Rightarrow 2x(x-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ x_2=1 \rightarrow \underline{B(1,\ 0)} \end{cases}$$

Los puntos de corte de las dos funciones se obtienen igualando sus ecuaciones:

$$-x^2+4x=2x^2-2x\ ;;\ 3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ x_2=2 \rightarrow \underline{C(2,\ 4)} \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es la de la figura.

b)

Por ser todas las ordenadas de la parábola $y=-x^2+4x$ mayores que las de la parábola $y=2x^2-2x$ en el intervalo (0, 2), la superficie pedida es la siguiente:

$$S=\int_0^2 \left[\left(-x^2+4x\right)-\left(2x^2-2x\right)\right]\cdot dx=\int_0^2 \left(-x^2+4x-2x^2+2x\right)\cdot dx=\int_0^2 \left(-3x^2+6x\right)\cdot dx=$$

$$=\left[-\frac{3x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}\right]_0^2=\left[-x^3+3x^2\right]_0^2=\left(-2^3+3\cdot 2^2\right)-0=-8+12=\underline{\underline{4\ u^2=S}}.$$

****

3º) Dado el sistema $\begin{cases} ax-3y+az=1 \\ 3x+2y=1 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$.

a) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro α.

b) Resolverlo cuando sea compatible.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix} a & -3 & a \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; A'=\begin{pmatrix} a & -3 & a & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -3 & a \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2a-3a-2a+9=9-3a=0 \Rightarrow \underline{a=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\;\; a\neq 3 \Rightarrow Rango\;\; A=Rango\;\; A'=3=n^{o}\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; Deter\min ado}}$$

Para α = 3 es $A'=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\;\; A' \Rightarrow \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-6-3-3-2+3-9=-20\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\;\; A'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\;\; a=3 \Rightarrow Rango\;\; A=2 \;;;\; Rango\;\; A'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Resolvemos por la regla de Cramer para α ≠ 3:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{9-3a}=\frac{2-a+2a+3}{3(3-a)}=\underline{\underline{\frac{a+5}{3(3-a)}}}=x.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{9-3a}=\frac{a-3a-a-3}{3(3-a)}=\frac{-3a-3}{3(3-a)}=\frac{3(-a-1)}{3(3-a)}=\underline{\underline{\frac{-a-1}{3-a}}}=y.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{9-3a}=\frac{-2a-3-3-2+a-9}{3(3-a)}=\underline{\underline{\frac{-a-17}{3(3-a)}}}=z$$

****

4º) Dadas las rectas secantes $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{1}$ y $s \equiv (x,\ y,\ z) = (1,\ -1,\ 0) + \lambda(-1,\ 6,\ 2)$:

a) Calcular su punto de intersección.

b) Hallar la ecuación del plano π que las contiene.

----

a)

Damos por supuesto que las rectas r y s se cortan, por lo cual, no se estudia su posición relativa.

Para calcular su punto de intersección expresamos las dos rectas por ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 5+2\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$;; $s \equiv \begin{cases} x = 1-\mu \\ y = -1+6\mu \\ z = 2\mu \end{cases}$.

Por tener un punto en común tiene que cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 5+2\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 1-\mu \\ y = -1+6\mu \\ z = 2\mu \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2-\lambda = 1-\mu \\ 5+2\lambda = -1+6\mu \\ 1+\lambda = 2\mu \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lambda = 1+\mu \\ 2\lambda = -6+6\mu \\ \lambda = -1+2\mu \end{array}\right\} \Rightarrow$$

De la primera y tercera ecuaciones se obtienen los valores de λ y μ:

$1+\mu = -1+2\mu$;; $\underline{\mu = 2}$;; $\underline{\lambda = 3}$.

<u>El punto de corte de las rectas r y s es P(-1, 11, 4).</u>

b)

Para hallar la ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s tenemos en cuenta que los vectores directores de las rectas, $\overrightarrow{v_r} = (-1,\ 2,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (-1,\ 6,\ 2)$, son vectores directores del plano π. Considerando un punto de una de las rectas, por ejemplo el punto de la recta s, A(1, -1, 0), la ecuación general del plano π es la siguiente:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 4(x-1)-(y+1)-6z+2z-6(x-1)+2(y+1) = 0 \ ;;$$

$$-2(x-1)+(y+1)-4z = 0 \ ;;\ -2x+2+y+1-4z = 0 \Rightarrow \underline{\underline{2x-y+4z-3=0}}$$

****