

**PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)****UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS****JULIO – 2014**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

**MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones, el tribunal podrá anular su examen.

En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

**OPCIÓN A**

1º) Sea la función  $f(x) = e^{x^2+ax+b}$ .

a) Calcular  $\alpha$  y  $b$  para que  $f(x)$  tenga un extremo en el punto  $A(1, 1)$ .

b) Calcular los extremos de la función  $f(x)$  cuando  $\alpha = 0$  y  $b = 0$ .

a)

Por contener la función  $f(x) = e^{x^2+ax+b}$  al punto  $A(1, 1)$  es  $f(1) = 1$ :

$$f(1) = 1 \Rightarrow e^{1^2+a+b} = 1 \Rightarrow 1+a+b=0 \;; \; \underline{a+b=-1}. \quad (1)$$

Una función tiene un extremo relativo en un punto cuando su derivada se anula para el valor de la abscisa en ese punto.

$$f'(x) = \underline{(2x+a) \cdot e^{x^2+ax+b}}.$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow (2+a) \cdot e^{1^2+a+b} = 0 \Rightarrow 2+a=0 \;; \; \underline{a=-2}.$$

Sustituyendo en (1) el valor de  $\alpha$  obtenido:  $-2+b=-1 \;; \; \underline{b=1}$ .

b)

Para  $\alpha = 0$  y  $b = 0$  la función resulta  $f(x) = e^{x^2}$ .

Una función tiene un extremo relativo para los valores de  $x$  que anulan la primera

derivada.

$$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \ ; \ ; \ x = 0.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, se trata de un mínimo.

$$f''(x) = 2 \cdot (1 \cdot e^{x^2} + x \cdot e^x) = \underline{2e^x(1+x)}.$$

$$f''(0) = 2 \cdot e^0(1+0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo para } x = 0.$$

$$f(0) = e^{0^2} = e^0 = 1 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo: P(0, 1)}}.$$

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es

2º) Calcular las integrales indefinidas siguientes:

a)  $\int \frac{5 \cdot dx}{(3x-1)^2}$ .      b)  $\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$ .      c)  $\int \frac{(x+1)^3}{2x} \cdot dx$ .

-----

a)

$$\int \frac{5 \cdot dx}{(3x-1)^2} = 5 \cdot \int \frac{dx}{(3x-1)^2} \Rightarrow \begin{cases} 3x-1=t \\ dx=\frac{1}{3} \cdot dt \end{cases} \Rightarrow 5 \cdot \int \frac{\frac{1}{3} \cdot dt}{t^2} = \frac{5}{3} \cdot \int t^{-2} \cdot dt = \frac{5}{3} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + C =$$

$$= -\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{t} + C = -\frac{5}{3t} + C = \underline{\underline{-\frac{5}{3(3x-1)} + C}}$$

b)

$$\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \int \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \right) \cdot dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx + 4 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \underline{A+4B}. \quad (*)$$

$$A = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx \Rightarrow \begin{cases} 1-x^2=t \\ -2x dx = dt \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \cdot \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_1 = -\sqrt{t} + C_1 = \underline{\underline{-\sqrt{1-x^2} + C_1 = A}}$$

$$B = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \underline{\underline{\text{arc sen } x + C_2 = B}}$$

Sustituyendo en (\*) los valores de A y B:

$$\underline{\underline{\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = 4 \text{ arc sen } x - \sqrt{1-x^2} + C}}$$

c)

$$\int \frac{(x+1)^3}{2x} dx = \int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{2x} dx = \int \left( \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2x} \right) dx = \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{2} + \frac{1}{2} L|x| + C.$$

$$\underline{\underline{\int \frac{(x+1)^3}{2x} dx = \frac{1}{2} \left( \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 3x + L|x| \right) + C}}$$

\*\*\*\*\*

3º) Estudiar el sistema de ecuaciones 
$$\left. \begin{array}{l} mx - y + 13z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \\ 2x - my + 4z = 0 \end{array} \right\} \text{ para los distintos valores del parámetro } m. \text{ Resolverlo cuando } m = 3.$$

-----

A efectos de rango las matrices de coeficientes y ampliada son iguales por tratarse de un sistema homogéneo. La matriz de coeficientes es  $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 13 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -m & 4 \end{pmatrix}$ .

El rango de A en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} m & -1 & 13 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -m & 4 \end{vmatrix} = 4m - 13m - 14 - 26 + 7m^2 + 4 = 7m^2 - 9m - 36 = 0 \quad ; ; \quad m = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 1008}}{14} =$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{1089}}{14} = \frac{9 \pm 33}{14} \Rightarrow m_1 = \frac{42}{14} = 3 \quad ; ; \quad m_2 = -\frac{24}{14} = -\frac{12}{7}.$$

Para  $\begin{cases} a \neq 3 \\ a \neq -\frac{12}{7} \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible det er min ado}$

Para  $\begin{cases} a = 3 \\ a = -\frac{12}{7} \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = 2 < n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible in det er min ado}$

Resolvemos para  $m = 3$ . El sistema resulta 
$$\left. \begin{array}{l} 3x - y + 13z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \end{array} \right\} \text{ que es compatible in-}$$

determinado; despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la primera, e igualando a un parámetro una de las ecuaciones, por ejemplo  $z = \lambda$ :

$$\begin{cases} x + y = -7\lambda \\ 2x - 3y = -4\lambda \end{cases} \begin{cases} 3x + 3y = -21\lambda \\ 2x - 3y = -4\lambda \end{cases} \Rightarrow 5x = -25\lambda \quad ; ; \quad x = -5\lambda \quad ; ; \quad -5\lambda + y = -7\lambda \quad ; ; \quad y = -2\lambda.$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = -5\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \quad \forall \lambda \in R.$$

\*\*\*\*\*

4º) Sea el punto P(1, 0, 1) y la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$ .

a) Hallar la ecuación en forma continua de una recta s que pase por el punto P y sea paralela a la recta r.

b) Halla la ecuación general de un plano  $\pi$  que pase por el punto P y contenga a r.

-----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \underline{x = 1 + 2\lambda} \;; \; y = \lambda - x = \lambda - 1 - 2\lambda = \underline{-1 - \lambda} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto de r es A(1, -1, 0) y un vector director de r es  $\vec{v}_r = (2, -1, 1)$ .

La recta s, por ser paralela a r, tiene su mismo vector director; su ecuación en forma continua es la siguiente:

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

b)

Los puntos A y P determinan el vector  $\vec{u} = \overrightarrow{AP} = P - A = (1, 0, 1) - (1, -1, 0) = (0, 1, 1)$ .

Los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}_r$  son vectores del plano  $\pi$  pedido, cuya expresión general es la siguiente:

$$\pi(P; \vec{u}, \vec{v}_r) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;; \; (x-1) + 2y - 2(z-1) + (x-1) = 0 \;;$$

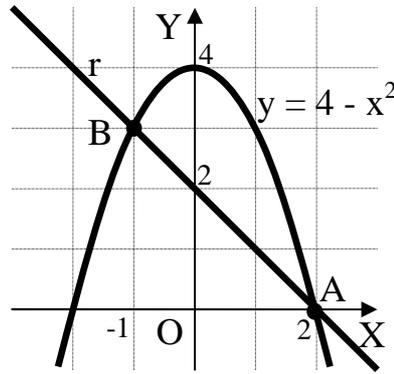
$$2(x-1) + 2y - 2(z-1) = 0 \;; \; (x-1) + y - (z-1) = 0 \;; \; x-1 + y - z + 1 = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x + y - z = 0}}$$

\*\*\*\*\*

## OPCIÓN B

1º) En la figura siguiente se muestran la parábola de ecuación  $f(x) = 4 - x^2$  y la recta que pasa por los puntos A y B de la parábola de abscisas -1 y 2, respectivamente. Hallar la ecuación de una recta s tangente a la parábola  $f(x)$  y paralela a la recta r.



Las coordenadas de los puntos A y B son las siguientes:

$$f(2) = 4 - 2^2 = 4 - 4 = 0 \rightarrow \underline{A(2, 0)}.$$

$$f(-1) = 4 - (-1)^2 = 4 - 1 = 3 \rightarrow \underline{B(-1, 3)}.$$

La pendiente de la recta r es la misma que la del vector  $\overrightarrow{BA}$ :

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (2, 0) - (-1, 3) = (3, -3) \Rightarrow \text{Pendiente} = m = \frac{-3}{3} = \underline{-1}.$$

La pendiente de la recta pedida s, por ser paralela a r, también es  $m = -1$ .

La pendiente a una función en un punto es igual que la derivada de la función en ese punto; como se conoce la pendiente, el valor de la primera derivada tiene que ser también  $f'(x) = -1$ :

$$f'(x) = -2x = -1 \rightarrow \underline{x = \frac{1}{2}}.$$

$$\text{El punto de tangencia es: } f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} \Rightarrow \underline{T\left(\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)}.$$

$$s \equiv y - \frac{15}{4} = -1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = -x + \frac{1}{2} \quad ; \quad 4y - 15 = -4x + 2 \Rightarrow \underline{\underline{s \equiv 4x + 4y - 17 = 0}}.$$

\*\*\*\*\*

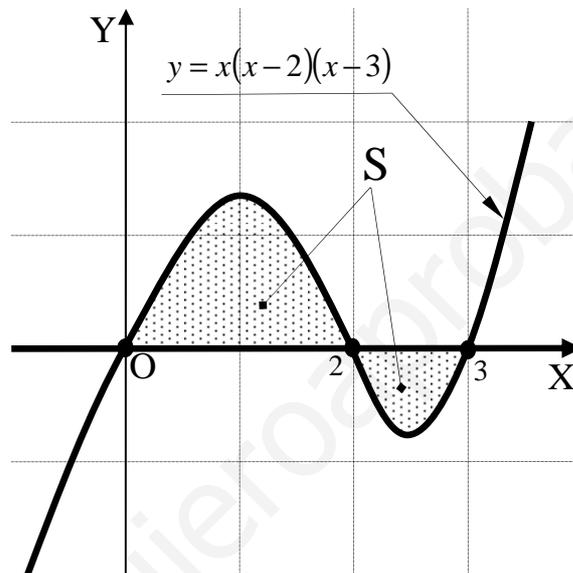
2º) Calcular el área de la región plana limitada por la curva  $y = x(x-2)(x-3)$  y la recta de ecuación  $y = 0$ .

-----

Los puntos de corte de la curva polinómica  $y = x(x-2)(x-3)$  tienen por abscisas las soluciones de la ecuación  $x(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \underline{O(0, 0)} \\ x_2 = 2 \rightarrow \underline{A(2, 0)} \\ x_3 = 3 \rightarrow \underline{B(3, 0)} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que, por ejemplo,  $y(4) = 4 \cdot (4-2)(4-3) > 0$ , la representación gráfica aproximada de la curva es la que indica la figura adjunta.



Para facilitar la integración obtenemos la expresión polinómica de la curva, que es la siguiente:  $y = x(x-2)(x-3) = x(x^2 - 5x + 6) = \underline{x^3 - 5x^2 + 6x}$ .

De la observación de la figura se deduce el valor del área, que es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 (x^3 - 5x^2 + 6x) \cdot dx - \int_2^3 (x^3 - 5x^2 + 6x) \cdot dx = \int_0^2 (x^3 - 5x^2 + 6x) \cdot dx + \int_3^2 (x^3 - 5x^2 + 6x) \cdot dx = \\ &= \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^2 + \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 3x^2 \right]_3^2 = \left( \frac{2^4}{4} - \frac{5 \cdot 2^3}{3} + 3 \cdot 2^2 \right) - 0 + \left( \frac{2^4}{4} - \frac{5 \cdot 2^3}{3} + 3 \cdot 2^2 \right) - \\ &- \left( \frac{3^4}{4} - \frac{5 \cdot 3^3}{3} + 3 \cdot 3^2 \right) = 2 \cdot \left( \frac{16}{4} - \frac{40}{3} + 12 \right) - \frac{81}{4} + 45 - 27 = 8 - \frac{80}{3} + 24 - \frac{81}{4} + 18 = 50 - \frac{80}{3} - \frac{81}{4} = \\ &= \underline{\underline{\frac{600 - 320 - 243}{12} = \frac{600 - 563}{12} = \frac{37}{12} u^2 = S}} \end{aligned}$$

\*\*\*\*\*

3º) Determinar los valores de los parámetros  $\alpha$  y  $b$  para los que tiene inversa la matriz

$A = \begin{pmatrix} a+b & 4b \\ a & a+b \end{pmatrix}$ . Calcular la matriz  $A^{-1}$  cuando  $\alpha = 3$  y  $b = 1$ .

-----

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b & 4b \\ a & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 = 0 \Rightarrow \underline{a=b}.$$

$A$  es inversible  $\forall a, b \in R, a \neq b$ .

Para  $\alpha = 3$  y  $b = 1$  es  $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Hallamos  $A^{-1}$  por el procedimiento de Gauss-

Jordan:

$$\begin{aligned} (A/I) &= \left( \begin{array}{cc|cc} 4 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 - F_2\} \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow \frac{1}{4}F_2\} \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}}}. \end{aligned}$$

\*\*\*\*\*

4º) Determinar la posición relativa de los planos  $\beta_1 \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda - 2\mu \\ y = 4 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda - 5\mu \end{cases}$ ,  $\beta_2 \equiv x + y + z = 2$ , y

$$\beta_3 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

-----

En primer lugar se expresan los planos por ecuaciones implícitas.

$$\beta_1 \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda - 2\mu \\ y = 4 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda - 5\mu \end{cases} \Rightarrow P_1(-1, 4, -2), \vec{u}_1 = (3, 1, 2), \vec{u}_2 = (-2, 0, -5).$$

$$\beta_1(P_1; \vec{u}_1, \vec{u}_2) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-4 & z+2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0 \;; \; -5(x+1) - 4(y-4) + 2(z+2) + 15(y-4) = 0 \;;$$

$$-5(x+1) + 11(y-4) + 2(z+2) = 0 \;; \; -5x - 5 + 11y - 44 + 2z + 4 = 0 \Rightarrow \underline{\beta_1 \equiv 5x - 11y - 2z + 45 = 0}.$$

$$\underline{\beta_2 \equiv x + y + z - 2 = 0}.$$

$$\beta_3 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;; \; 2(x-2) + 2(y+1) + 3z - 4z - 3(x-2) - (y+1) = 0 \;;$$

$$-(x-2) + (y+1) - z = 0 \;; \; -x + 2 + y + 1 - z = 0 \Rightarrow \underline{\beta_3 \equiv x - y + z - 3 = 0}.$$

Siendo M y M' las matrices de coeficientes y ampliada, respectivamente, que determinan los tres planos, según sus rangos, pueden presentarse los seis siguientes casos:

Rango M = Rango M' = 3  $\rightarrow$  S. C. D.  $\rightarrow$  Los tres planos se cortan en un punto.

Rango M = Rango M' = 2  $\rightarrow$  S. C. I.  $\rightarrow$  Los tres planos se cortan en una recta.

Rango M = Rango M' = 1  $\rightarrow$  S. C. I.  $\rightarrow$  Los tres planos son coincidentes.

Rango M = 2 ;; Rango M' = 3  $\rightarrow$  S. I.  $\rightarrow$  Dos planos paralelos cortados por el 3º.

Rango M = 1 ;; Rango M' = 3  $\rightarrow$  S. I.  $\rightarrow$  Los tres planos son paralelos.

Rango M = 1 ;; Rango M' = 2  $\rightarrow$  S. I.  $\rightarrow$  Dos planos coincidentes y secantes al 3º.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -11 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 5 & -11 & -2 & 45 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Rango } M \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} 5 & -11 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 2 - 11 + 2 + 5 + 11 = 14 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M = 3}.$$

$\text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible determinado.}$

Los tres planos se cortan en un punto.

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es