PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones, el tribunal podrá anular su examen.

En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN A

1º) Consideramos la función $f(x) = L(x-1)$ definida en el intervalo $[2, e+1]$. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = L(x-1)$ que sea paralela a la recta que pasa por los puntos $P(2,0)$ y $Q(e+1,1)$.

La recta que pasa por los puntos P y Q tiene por vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{PQ}$, que es:

$$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(e+1,1) - (2,0)] = (e-1,1) \Rightarrow \boldsymbol{m = \frac{1}{e-1}}.$$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{1}{e-1} \Rightarrow \boldsymbol{x = e}.$$

El punto de tangencia es: $y_{(e)} = L(e-1) \Rightarrow \boldsymbol{T[e, L(e-1)]}$.

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$$y - L(e-1) = \frac{1}{e-1}(x-e); \quad (e-1)y - (e-1)\cdot L(e-1) = x - e.$$

La ecuación de la recta tangente pedida es la siguiente:

$$\underline{Recta\ tangente: t \equiv x - (e-1)y + [(e-1) \cdot L(e-1) - e] = 0.}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Calcular las integrales siguientes: $a)\ I=\int\frac{dx}{(2x+1)^2+4}$. $b)\ I=\int x^2(x^3+1)^{-7}dx$.

$a)$

$$I=\int\frac{dx}{(2x+1)^2+4}=\frac{1}{4}\cdot\int\frac{dx}{\frac{(2x+1)^2+4}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\int\frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2+1}=\frac{1}{4}\cdot\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{x+\frac{1}{2}=t\rightarrow dx=dt\right\}\Rightarrow\frac{1}{4}\cdot\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{4}\cdot arc\ tg\ t+C.$$

$$\underline{I=\int\frac{dx}{(2x+1)^2+4}=\frac{1}{4}\cdot arc\ tg\ \left(x+\frac{1}{2}\right)+C.}$$

$b)$

$$I=\int x^2(x^3+1)^{-7}dx\ \Rightarrow\left\{\begin{matrix}x^3+1=t\rightarrow 3x^2\cdot dx=dt\\ x^2\cdot dx=\frac{1}{3}\cdot dt\end{matrix}\right\}\Rightarrow\int t^{-7}\cdot\frac{1}{3}dt=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\int t^{-7}\cdot dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-6}}{-6}+C=-\frac{1}{18\cdot t^6}+C.$$

$$\underline{I=\int x^2(x^3+1)^{-7}dx=-\frac{1}{18\cdot(x^3+1)^6}+C.}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

3º) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - ay = -3 \\ 2x + ay - 5z = 13 \\ x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$:

a) Estudiar su compatibilidad para los distintos valores del parámetro a.

b) Resolverlo para $a = 3$.

---

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -a & 0 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 3 & -a & 0 & -3 \\ 2 & a & -5 & 13 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & -a & 0 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -6a + 5a + 45 - 4a = -5a + 45 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{a = 9}.$$

$$\underline{Para\ a \neq 9 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = 9 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & -5 & 13 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 9 & -5 & 13 \\ 3 & -9 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -18 & 6 & -18 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to -6F_2\} \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M' = 2}.$$

$$\underline{Para\ a = 9 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

b)

Para $a = 3$ es sistema es $\begin{cases} 3x - 3y = -3 \\ 2x + 3y - 5z = 13 \\ x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 13 & 3 & -5 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{-5 \cdot 3 + 45} = \frac{18+75-45-78}{-15+45} = \frac{93-123}{30} = -\frac{30}{30} = -1.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 13 & -5 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}}{30} = \frac{-78+15+75-12}{30} = \frac{90-90}{30} = \frac{0}{30} = 0.$$

www.yoquieroaprobar.es

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 13 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{30} = \frac{45-18-39+9-117+30}{30} = \frac{84-174}{30} = -\frac{90}{30} = -3.$$

$$\underline{Solución: x = -1, y = 0, z = -3.}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

4º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3y - z + (2 + m) = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar si r y s son rectas paralelas.

b) Hallar el valor del parámetro m para que las rectas r y s estén en un mismo plano.

---

a)

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3y - z + (2 + m) = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow \boldsymbol{s} \equiv \begin{cases} \boldsymbol{x = 1 - 2\lambda} \\ \boldsymbol{y = \lambda} \\ \boldsymbol{z = (2 + m) + 3\lambda} \end{cases}.$$

Los vectores directores de r y s son $\overrightarrow{v_r} = (1, 2, 1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (-2, 1, 3)$, que son linealmente independientes por no tener proporcionales sus componentes; esto implica que:

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ no\ son\ paralelas.}$$

b)

Un punto de r es $A(3, -1, 2)$ y un punto de s es $B(1, 0, 2 + m)$.

Los puntos A y B determinan el vector:

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = [B - A] = [(1, 0, 2 + m) - (3, -1, 2)] = (-2, 1, m).$$

Las rectas r y s son coplanarias cuando lo sean los vectores $\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}\ y\ \vec{w}$.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando su rango es menor que tres, es decir, cuando es cero el determinante de la matriz que forman:

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & m \end{vmatrix} = m - 2 - 12 + 2 - 3 + 4m = 0;$$

$5m - 15 = 0;\ \ m - 3 = 0\ \Rightarrow \boldsymbol{m = 3}.$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ son\ coplanarias\ para\ m = 3.}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN B

1º) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 2^x+a & si \quad x\le -1 \\ ax+b & si \quad -1<x\le 0 \\ 3x^2+2 & si \quad x>0 \end{cases}$. Determinar si existen valores de los parámetros a y b para los que $f(x)$ sea derivable en $\mathbb{R}$. Justificar la respuesta.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para los valores $x=-1$ y $x=0$, lque para forzar su continuidad se van a determinar los valores de a y b.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=-1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1} f(2^x+a)=\boldsymbol{2^{-1}+a=f(-1)} \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1} f(ax+b)=\boldsymbol{-a+b} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}+a=-a+b;\ \ 1+2a=-2a+2b;\ \ \boldsymbol{4a-2b=-1}. \quad (1)$$

$$Para\ x=0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(ax+b)=\boldsymbol{b} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(3x^2+2)=\boldsymbol{2=f(0)} \end{cases} \Rightarrow \ \underline{b=2}.$$

Sustituyendo en (1) el valor obtenido para b:

$$4a-4=-1;\ \ 4a=3 \ \Rightarrow \ \underline{a=\frac{3}{4}}.$$

La función resulta $\boldsymbol{f(x)}=\begin{cases} \boldsymbol{2^x+\frac{1}{4}} & \boldsymbol{si \quad x\le -1} \\ \boldsymbol{\frac{3}{4}x+2} & \boldsymbol{si \quad -1<x\le 0} \\ \boldsymbol{3x^2+2} & \boldsymbol{si \quad x>0} \end{cases}$.

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para los valores $x=-1$ y $x=0$ cuya derivabilidad se va a estudiar a continuación.

Un función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} 2^x\cdot L2 & si \quad x\le -1 \\ \frac{3}{4} & si \quad -1<x\le 0. \\ 6x & si \quad x>0 \end{cases}$$

www.yoquieroaprobar.es

$f'(-1^-) = 2^{-1} \cdot L2 = \frac{L2}{2}$. $\quad f'(-1^+) = \frac{3}{4}$. $\quad \boldsymbol{f'(-1^-) \neq f'(-1^+)}$.

$f'(0^-) = \frac{3}{4}$. $\quad f'(0^+) = 0$. $\quad \boldsymbol{f'(0^-) \neq f'(0^+)}$.

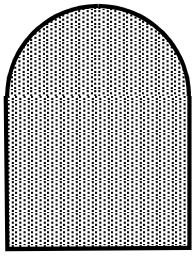
$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ es\ derivable\ para\ x = -1\ ni\ para\ x = 0}$.

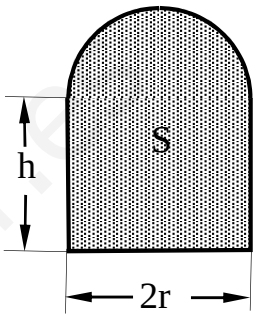
$\underline{No\ existen\ valores\ reales\ de\ a\ y\ b\ para\ que\ f(x)\ sea\ derivable\ en\ R}$.

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) La boca de un túnel tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo como se muestra en la figura. Encontrar las medidas del túnel que deje pasar más luz si el perímetro de la figura mide 5 metros.





De la figura acotada se deduce el valor de la superficie en función de los valores de r e h:

$$S(r,h) = 2r \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2.$$

El perímetro es el siguiente:

$$p = 2h + 2r + \pi r = 5 \ \Rightarrow \boldsymbol{h} = \frac{\mathbf{5-2r-\pi r}}{\mathbf{2}}.$$

Sustituyendo en la superficie el valor de h obtenido, resulta:

$$S(r) = 2r \cdot \frac{5-2r-\pi r}{2} + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot (10r - 4r^2 - 2\pi r^2 + \pi r^2) =$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot (\mathbf{10r - 4r^2 - \pi r^2}).$$

Para que la superficie sea máxima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'(x) = \frac{1}{2} \cdot (10 - 8r - 2\pi r) = 5 - 4r - \pi r.$$

$$S''(x) = -4 - \pi < 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{Máximo}.$$

$$S'(x) = 0 \ \Rightarrow 5 - 4r - \pi r = 0; \ \ 5 = (4 + \pi) \ \Rightarrow \boldsymbol{r} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4+\pi}} \cong \mathbf{0,70}.$$

$$h = \frac{5-2r-\pi r}{2} = \frac{5-2\cdot\frac{5}{4+\pi}-\pi\cdot\frac{5}{4+\pi}}{2} = \frac{20+5\pi-10-5\pi}{2(4+\pi)} = \frac{10}{2(4+\pi)} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{h} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4+\pi}} \cong \mathbf{0,70}.$$

$$\underline{Deja\ pasar\ más\ luz\ el\ tunel\ que\ tiene\ de\ radio\ y\ de\ altura\ 0{,}70\ metros.}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

3º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -k & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 12 \end{pmatrix}$:

$a)$ ¿Para qué valores del parámetro k la matriz A tiene inversa?

$b)$ Hallar la matriz A^{-1} cuando k toma el valor k = 1.

$a)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -k & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 12 \end{vmatrix} = 24 - 7k - 4 - 4 + 14 + 12k = 5k + 30 = 0;$$

$k + 6 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{k = -6}$.

$$\underline{La\ matriz\ k\ es\ invertible\ \forall k \in R - \{-6\}}.$$

$b)$

Para k = 1 es $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 12 \end{pmatrix}$. $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & 12 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 12 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 + 30 = 5 + 30 = 35.$$

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 12 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 12 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 8 & -11 \\ -5 & 20 & -10 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{1}{35} \cdot \begin{pmatrix} 19 & 8 & -11 \\ -5 & 20 & -10 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}.$$

****

www.yoquieroaprobar.es

4º) Sean r y s las rectas $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 \end{cases}$ y $s \equiv x - 1 = y = z - 3$. Calcular:

a) La ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $P(0, 1, 3)$.

b) Las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas.

c) La ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.

---

a)

La recta r tiene como vector director a $\overrightarrow{v_r} = (1, -1, 0)$.

Un vector normal del plano β pedido es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector normal de la recta: $\vec{n} = (1, -1, 0)$.

La expresión general del plano es: $\beta \equiv x - y + D = 0$.

Como el plano β contiene al punto $P(0, 1, 3)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv x - y + D = 0 \\ P(0, 1, 3) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 1.$$

$$\underline{\beta \equiv x - y + 1 = 0}.$$

b)

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es: $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \mu \\ z = 3 + \mu \end{cases}$.

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 1 + \mu \\ y = \mu \\ z = 3 + \mu \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \mu = 0 \\ \lambda = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Q(1, 0, 3)}.$$

c)

Considerando el punto Q y los vectores $\overrightarrow{v_r} = (1, -1, 0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1, 1, 1)$, el plano π pedido tiene la siguiente expresión general:

$$\pi(Q;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-(x - 1) + (z - 3) + (z - 3) - y = 0;\ -x + 1 + 2z - 6 - y = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0}.$$

****

www.yoquieroaprobar.es