+PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x-x^2 & si \quad 0\le x\le 1 \\ (x-1)L^2x & si \quad 1<x\le 2 \end{cases}$.

$a)$ Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en $x=1$.

$b)$ Hallar la ecuación de la recta tangente a la cura $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x=\frac{3}{4}$.

$a)$

La función f(x) es continua en su dominio, $[0,2]$, excepto para x = 1 cuya continuidad vamos a estudiar.

Para que $f(x)$ sea continua en x = 1 es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-x^2)=1-1=0=f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}[(x-1)L^2x]=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(0)\Rightarrow f(x)\ es\ continua\ en\ x=1.}$$

$b)$

Para $x=\frac{3}{4}$ la función es $f(x)=x-x^2$.

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f\left(\tfrac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{4}-\frac{9}{16}=\frac{12-9}{16}=\frac{3}{16}\Rightarrow \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{\frac{3}{4}},\boldsymbol{\frac{3}{16}}\right).$$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = 1 - 2x \Rightarrow m = f'\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - 2 \cdot \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{2} = -\mathbf{\frac{1}{2}}.$$

Ecuación de la recta punto-pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$; la tangente es:

$$y - \frac{3}{16} = -\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right) \; ;; \; 16y - 3 = -8x + 6 \Rightarrow \underline{t \equiv 8x + 16y - 9 = 0}.$$

****

2º) Calcular las siguientes integrales: $a)\ I=\int \frac{5dx}{(6x+4)^2+2}$. $b)\ I=\int \frac{(2x-3)^2}{3\sqrt{x}}dx$.

$a)$

$$I=\int \frac{5dx}{(6x+4)^2+2}=\frac{5}{2}\cdot\int \frac{dx}{\frac{(6x+4)^2}{2}+1}=\frac{5}{2}\cdot\int \frac{dx}{\left(\frac{6x+4}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\frac{6x+4}{\sqrt{2}}=t\\ \frac{6}{\sqrt{2}}\cdot dx=dt\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{5}{2}\cdot\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{6}dt}{t^2+1}=\frac{5\sqrt{2}}{12}\cdot\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{5\sqrt{2}}{12}\cdot arc\ tg\ t+C.$$

$$\underline{I=\int \frac{5dx}{(6x+4)^2+2}=\frac{5\sqrt{2}}{12}\cdot arc\ tg\ \frac{6x+4}{\sqrt{2}}+C.}$$

$b)$

$$I=\int \frac{(2x-3)^2}{3\sqrt{x}}dx=\int \frac{4x^2-12x+9}{3\sqrt{x}}dx=\frac{4}{3}\cdot\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\cdot dx-4\cdot\int \frac{x}{\sqrt{x}}\cdot dx+3\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\int x^{\frac{3}{2}}\cdot dx-4\cdot\int x^{\frac{1}{2}}\cdot dx+3\cdot\int x^{-\frac{1}{2}}\cdot dx=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}-4\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+3\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{4}{3}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-4\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+3\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=$$

$$=\frac{8}{15}\cdot x^2\sqrt{x}-\frac{8}{3}\cdot x\sqrt{x}+6\sqrt{x}+C.$$

$$\underline{I=\int \frac{(2x-3)^2}{3\sqrt{x}}dx=\frac{2\sqrt{x}}{15}\cdot(4x^2-20x+45)+C.}$$

****

3º) Resolver el siguiente sistema matricial: $\left\{\begin{array}{l} 2P+Q=\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 4 & -2\end{pmatrix}\\ P-Q=\begin{pmatrix}2 & -1 & -5\\ 1 & 9 & 2\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\end{array}\right.$.

$$\left.\begin{array}{r} 2P+Q=\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 4 & -2\end{pmatrix}\\ P-Q=\begin{pmatrix}2 & -1 & -5\\ 1 & 9 & 2\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow 3P=\begin{pmatrix}3 & 3 & -6\\ 3 & 9 & 3\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{P=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{array}{r} 2P+Q=\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 4 & -2\end{pmatrix}\\ -2P+2Q=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 10\\ -2 & -18 & -4\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow 3Q=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 9\\ 0 & -18 & -3\\ 0 & 6 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Q=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & -6 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}}.$$

****

4º) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y-2z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x+y+mz-3=0$, se pide:

a) Determinar el valor del parámetro m para que la recta y el plano sean secantes.

b) Determinar el valor del parámetro m para que la recta y el plano sean paralelos.

c) ¿Cuál es la posición relativa de la recta r del enunciado y un plano α de ecuación $\alpha \equiv 2x+y+z-\frac{5}{3}=0$?

----

a)

Un vector director de la recta r dada por la intersección de dos planos es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v'_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2i+j-2k-k+2i+2j = 3j-3k = (0,3,-3) \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (0,1,-1).$$

Un vector normal del plano $\pi \equiv 2x+y+mz-3=0$ es $\vec{n}=(2,1,m)$.

Como quiera que el vector director de la recta y el vector normal del plano son linealmente independientes (no son paralelos), la única condición que deben reunir para que la recta y el plano sean secantes es que su producto escalar no sea cero (en cuyo caso serían perpendiculares y la recta y el plano serían paralelos).

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = (0,1,-1)\cdot(2,1,m) = 0+1-m = 1-m \neq 0.$$

$$\underline{\textit{La recta r y el plano } \pi \textit{ son secantes cuando } m \neq 1.}$$

b)

La recta r y el plano π son paralelos cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares, o sea, cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (0,1,-1)\cdot(2,1,m) = 0+1-m = 1-m = 0.$$

$$\underline{\textit{La recta r y el plano } \pi \textit{ son paralelos cuando } m = 1.}$$

c)

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x-2y-2z=0 \\ 6x+3y+3z=5 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- Rango M = Rango M' = 2 ⇛ La recta está contenida en el plano.

2. -- Rango M =2, Rango M' = 3 ⇛ La recta es paralela al plano.

3. -- Rango M = Rango M' = 3 ⇛ La recta es secante al plano.

Rango de M ⇒ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_2 = C_3\} \Rightarrow Rango\ M = 2.$

$$Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 3 + 12 - 5 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$$\underline{La\ recta\ r\ está\ contenida\ en\ el\ plano\ \pi.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Determinar el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los intervalos de concavidad y convexidad, las asíntotas, los puntos de corte con los ejes, los extremos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x}$.

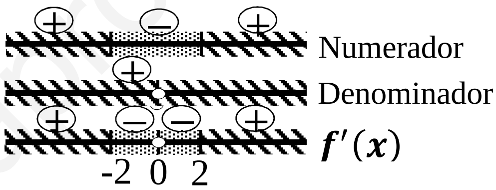
Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador: $\underline{D(f) \Rightarrow R - \{0\}}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{[2\cdot(x-2)\cdot 1]\cdot x-(x-2)^2\cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2-4x-(x^2-4x+4)}{x^2} = \frac{2x^2-4x-x^2+4x-4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2} = 0;\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = -2, x_2 = 2}.$$

De la observación de la figura se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:



$$\underline{Crecimiento: (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: (-2, 0) \cup (0, 2)}.$$

Una función es cóncava (∩) o convexa (∪) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$$f''(x) = \frac{2x\cdot x^2-(x^2-4)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^2-2x^2+4}{x^3} = \boldsymbol{\frac{4}{x^3}}.$$

$$\underline{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow (-\infty, 0)}.$$

$$\underline{Convexidad\ (\cup): f''(x) > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow (0, +\infty)}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-2)^2}{x} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x = 0 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = 0\ (eje\ Y)\ es\ asíntota\ vertical}.$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{(x-2)^2}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+4}{x^2} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(x-2)^2}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+4-x^2}{x} = -4.$$

$$\underline{La\ recta\ y = x - 4\ es\ asíntota\ oblicua}.$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

Eje Y$\Rightarrow x = 0 \to x \notin D(f)$. Eje X $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{x} = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \to$

$\to x = 2 \Rightarrow A(2, 0)$.

$$\underline{El\ único\ punto\ de\ corte\ con\ los\ ejes\ de\ f(x)\ es\ A(2,0)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2.$

$f''(-2) = \frac{4}{(-2)^3} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -2$.

$f(-2) = \frac{(-2-2)^2}{-2} = -8 \Rightarrow \underline{Máximo: P(-2, -8)}.$

$f''(2) = \frac{4}{2^3} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2$.

$f(2) = \frac{(2-2)^2}{2} = 0 \Rightarrow \underline{Mínimo: Q(2, 0)}.$

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{4}{x^3} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{R} \Rightarrow \underline{No\ tiene\ puntos\ de\ inflexión.}$$

****

2º) a) Dibujar las gráficas aproximadas de $f(x) = x^2 + 4x + 5$ y $g(x) = 5$, señalando los puntos de corte entre ambas curvas.

b) Calcular el área encerrada entre las gráficas de las dos funciones del apartado a).

----

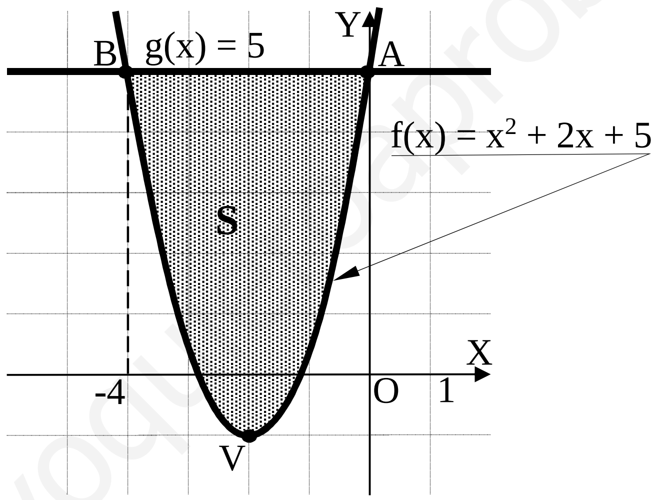
a)

Los puntos de intersección de la parábola con la recta son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 + 4x + 5 = 5\ ;\ x^2 + 4x = 0\ ;\ x(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \underline{A(0,5)} \\ x_2 = -4 \rightarrow \underline{B(-4,5)} \end{cases}.$$

El vértice de la parábola convexa $(\cup) \rightarrow f(x) = x^2 + 4x + 5$ es el siguiente:

$f'(x) = 2x + 4 = 0 \rightarrow x = -2\ \Rightarrow V(-2,-1)$.



La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

b)

Por ser las ordenadas de la recta $g(x) = 5$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $f(x) = x^2 + 4x + 5$ en el intervalo del área a calcular y de la observación de la figura se deduce que:

$$S = \int_{-4}^{0}[5 - (x^2 + 4x + 5)]dx = \int_{-4}^{5}(-x^2 - 4x)\cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2}\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_{0}^{-4} = \frac{(-4)^3}{3} + 2\cdot(-4)^2 - 0 = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{-64+96}{3} = \frac{32}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{32}{3}\ u^2.}$$

****

3º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 - 1 \end{pmatrix}$:

$a)$ Estudiar el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro m.

$b)$ Calcular la matriz inversa A^{-1} para m = 1.

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 - 1 \end{vmatrix} = m(x^2 - 1) - 2m = m(x^2 - 1 - 2) =$$

$$m(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_1 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3}.$$

$$\underline{Rang\ A = 3, \forall m \in R - \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}.}$$

$$Para\ m = 0\ es\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A = 2.$$

$$Para\ m = -\sqrt{3}\ es\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A = 2.$$

$$Para\ m = \sqrt{3}\ es\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A = 2.$$

$$\underline{Para\ m = -\sqrt{3}, m = 0, m = \sqrt{3} \Rightarrow Rang\ A = 2.}$$

$b)$

Para m = e es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Se obtiene la inversa de A por el procedimiento de Gauss-Jordan:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 2F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \to -\tfrac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

****

4º) Dadas las rectas $r_1 \equiv x-1=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$ y $r_2 \equiv \frac{x+5}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+4}{3}$, se pide:

a) Demostrar que se encuentran en un mismo plano.

b) Hallar la ecuación del plano que determinan.

----

a)

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $A(1,1,-2)\ y\ \overrightarrow{v_r}=(1,-1,2)$. Recta s: $B(-5,3,-4)\ y\ \overrightarrow{v_s}=(4,-2,3)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independiente por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w}=\overrightarrow{AB}=[B-A]=[(-5,3,-4)-(1,1,-2)]=(-6,2,-2)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ -6 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4+16+18-24-6-8=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\}=2\ \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\ son\ coplanarios}.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ están\ en\ un\ mismo\ plano, como\ se\ debía\ demostrar.}$$

b)

La expresión general del plano π que contiene a las rectas r y s es el siguiente:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-3(x-1)+8(y-1)-2(z+2)+4(z+2)+4(x-1)-3(y-1)=0;$$

$$(x-1)+5(y-1)+2(z+2)=0;\ \ x-1+5y-5+2z+4=0.$$

$$\underline{\pi \equiv x+5y+2z-2=0.}$$

****