PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo.

OPCIÓN A

1º) Determinar los valores de a y b para que la función $f(x)$ definida de la siguiente forma: $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+a & si\ \ x\leq 2 \\ -x^2+bx & si\ \ x>2 \end{cases}$ sea derivable en todo $x\in R$.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=2$; se trata de determinar los valores de α y b para que sea derivable en el punto crítico $x=2$.

Para que la función sea continua en $x=2$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguale al valor de la función en ese punto.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+4x+a)=4+8+a=12+a=f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(-x^2+bx)=-4+2b \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$12+a=-4+2b;\ \ a-2b=-16.$ (1)

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas laterales son iguales en ese punto.

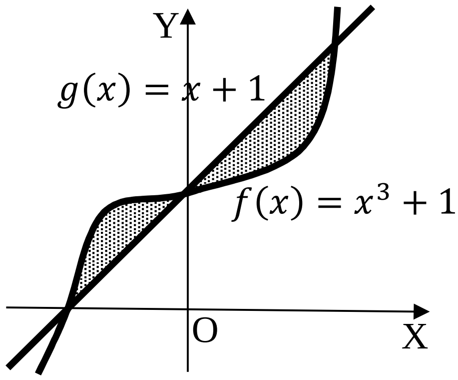
$$f'(x)=\begin{cases} 2x+4 & si\ \ x\leq 2 \\ -2x+b & si\ \ x>2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f'(2^-)=4+4=8 \\ f'(2^+)=-4+b \end{cases}\Rightarrow f'(2^-)=f'(2^+)\Rightarrow$$

$\Rightarrow -4+b=8\Rightarrow \underline{b=12}$. Sustituyendo el valor de b en (1):

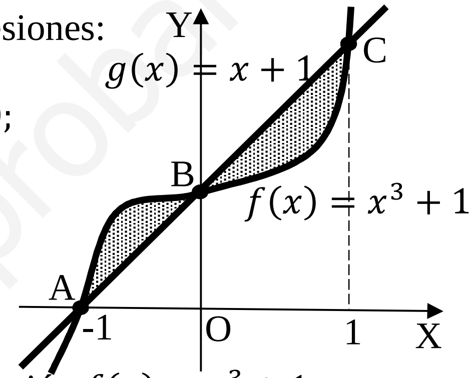
$$a-2\cdot 12=-16;\;\; a=-16+24 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{a=8}}.$$

****

2º) Calcular el área de la región sombreada en la figura adjunta, sabiendo las ecuaciones de las funciones que aparecen en la gráfica.



Los puntos de corte de las dos funciones tienen como abscisas las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:



$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 + 1 = x + 1;\ x^3 - x = 0;$$

$$x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \ \rightarrow A(-1, 0) \\ x_2 = 0 \ \rightarrow B(0, 1) \\ x_3 = 1 \ \rightarrow C(1, 2) \end{cases}.$$

En el intervalo $(-1, 0)$ las ordenadas de la función $f(x) = x^3 + 1$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la función $g(x) = x + 1$ y en el intervalo $(0, 1)$ ocurre lo contrario.

Teniendo en cuenta lo anterior y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente.

$$S = \int_{-1}^{0} [f(x) - g(x)] \cdot dx + \int_{0}^{1} [g(x) - f(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} [(x^3 + 1) - (x + 1)] \cdot dx + \int_{0}^{1} [(x + 1) - (x^3 - 1)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 + 1 - x - 1) \cdot dx + \int_{0}^{1} (x + 1 - x^3 + 1) \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x) \cdot dx + \int_{0}^{1} (-x^3 + x + 2) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{0}^{1} =$$

$$= 0 - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2}\right] + \left(-\frac{1^4}{4} + \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1\right) - 0 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}.$$

$$\underline{S = \frac{3}{2}\ u^2.}$$

****

3º) Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales: $\left.\begin{array}{r} 2X + 3Y = M \\ 3X - 2y = M^{-1} \end{array}\right\}$.

La inversa de M se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(M/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - 7F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left.\begin{array}{r} 2X + 3Y = M \\ 3X - 2y = M^{-1} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 4X + 6Y = 2M \\ 9X - 6y = 3M^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow 13X = 2M + 3M^{-1};$$

$$13X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 5 \\ 5 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{X = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -21 & 5 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{array}{r} 2X + 3Y = M \\ 3X - 2y = M^{-1} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 6X + 9Y = 3M \\ -6X + 4y = -2M^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow 13Y = 3M - 2M^{-1};$$

$$13Y = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -14 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 21 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{Y = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 21 \end{pmatrix}}.$$

****

4º) Dado el plano $\pi \equiv 2x + y - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ y, se pide:

a) Escribir la ecuación de la recta r en forma de ecuaciones continuas.

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 2, 1)$, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π.

----

a)

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda;\ y = 1 - 2\lambda;\ z = 3 - x + y = 3 - \lambda + 1 - 2\lambda =$$

$$= 4 - 3\lambda \ \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda. \\ z = 4 - 3\lambda \end{cases}$$

$$\underline{r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-4}{-3}}.$$

b)

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (1, -2, -3)$.

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (2, 1, -1)$.

La expresión general del plano β pedido es la siguiente:

$$\beta(P;\ \overrightarrow{v_r}, \vec{n}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$2(x - 1) - 6(y - 2) + (z - 1) + 4(z - 1) + 3(x - 1) + (y - 1) = 0;$

$5(x - 1) - 5(y - 2) + 5(z - 1) = 0;\ \ (x - 1) - (y - 2) + (z - 1) = 0;$

$x - 1 - y + 2 + z - 1 = 0 \ \ \Rightarrow \ \ \underline{\beta \equiv x - y + z = 0}.$

****

OPCIÓN B

1º) Calcular los siguientes límites: $a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen\ (x^2)}$. $\quad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2}$.

$a)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen\ (x^2)}=\frac{e^0+e^{-0}-2\cos 0}{sen\ 0}=\frac{1+1-2\cdot 1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2sen\ x}{2x\cdot cos\ (x^2)}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x^2)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2sen\ x}{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2sen\ x}{x}=$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2sen\ x}{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^0-e^{-0}+2sen\ 0}{0}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-1+2\cdot 0}{0}=\frac{1}{2}\cdot\frac{0}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+2\cdot cos\ x}{1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+1+2\cdot 1}{1}=\frac{4}{2}=2.$$

$$\underline{\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen\ (x^2)}=2.}$$

$b)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2}=\frac{\sqrt{4+0}-2-\frac{0}{4}}{0^2}=\frac{2-2-0}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}}-0-\frac{1}{4}}{2x}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{4+0}}-0-\frac{1}{4}}{2\cdot 0}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{2\sqrt{4+x}}}{x+4}}{2}=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(4+x)\cdot\sqrt{4+x}}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4\cdot 2}=-\frac{1}{32}.$$

$$\underline{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2}=-\frac{1}{32}.}$$

Otra forma de hacer este ejercicio:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{4+x}-8-x}{4x^2}=\frac{4\sqrt{4+0}-8-0}{4\cdot 0^2}=\frac{4\cdot 2-8}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

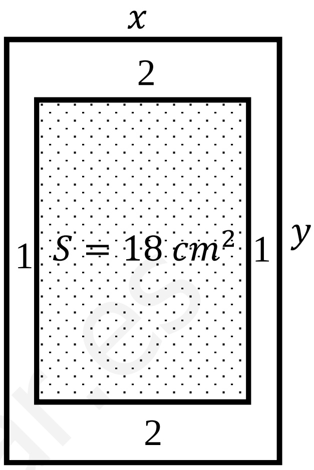
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{4+x}-8-x}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{4+x}-(8+x)}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[4\sqrt{4+x}-(8+x)\right]\cdot\left[4\sqrt{4+x}+(8+x)\right]}{4x^2\cdot\left[4\sqrt{4+x}+(8+x)\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(4\sqrt{4+x}\right)^2-(8+x)^2}{4x^2\cdot\left(4\sqrt{4+x}+8+x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{16(4+x)-(64+16x+x^2)}{4x^2\cdot\left(4\sqrt{4+x}+8+x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{64+16x-64-16x-x^2}{4x^2\cdot\left(4\sqrt{4+x}+8+x\right)}=$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{4x^2 \cdot \left(4\sqrt{4+x}+8+x\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{4 \cdot \left(4\sqrt{4+x}+8+x\right)} = \frac{-1}{4 \cdot (4 \cdot 2+8+0)} = \underline{-\frac{1}{32}}.$$

****

2º) Se quiere fabricar un smartphone con una pantalla LCD de 18 cm^2. Los bordes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los bordes laterales 1 cm. Calcular las dimensiones del teléfono para que la superficie del mismo sea mínima.



La superficie total es $S = x \cdot y$.   (*)

También puede expresarse la superficie total de la forma siguiente:

$$S = 18 + 2 \cdot 2x + 2 \cdot 1 \cdot (y - 4).$$

$$18 + 2 \cdot 2x + 2 \cdot 1 \cdot (y - 4) = x \cdot y;$$

$$18 + 4x + 2y - 8 = x \cdot y; \;\; 10 + 4x = x \cdot y - 2y;$$

$$y(x - 2) = 10 + 4x \Rightarrow y = \frac{10+4x}{x-2}.$$

Sustituyendo en (*) el valor hallado de y: $S(x) = x \cdot \frac{4x+10}{x-2} = \frac{4x^2+10x}{x-2}$.

Para que la superficie sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'(x) = \frac{(8x+10)\cdot(x-2)-(4x^2+10x)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{8x^2-16x+10x-20-4x^2-10x}{(x-2)^2} = \frac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2}.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2} = 0; \;\; 4x^2 - 16x - 20 = 0; \;\; x^2 - 4x - 5 = 0;$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 2 \pm 3 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 5.$$

La solución negativa carece de sentido, es para mínimo. La solución es $x = 5$.

$$y = \frac{10+4\cdot 5}{5-2} = \frac{10+20}{3} = \frac{30}{3} = 10.$$

$\underline{\textit{La superficie es mínima cuando las dimensiones del teléfono son } 10 \times 5\ cm.}$

****

3º) Hallar la matriz X que cumple la ecuación matricial $A^{-1}XA = B$ siendo las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1}XA = B;\ \ A \cdot A^{-1} \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = A \cdot B \cdot A^{-1};\ \ I \cdot X \cdot I = A \cdot B \cdot A^{-1}.$$

$$\underline{X = A \cdot B \cdot A^{-1}}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1.\ \ A^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.\ \ Adj.\,de\ A^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$X = A \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}}.$$

****

4º) Dados la recta $r \equiv x = y + 1 = \frac{z - \frac{11}{m}}{\frac{-3}{m}}$ y el planos $\pi \equiv 2x + y + z = 9$, se pide:

a) Calcular el valor del parámetro m para que la recta r sea paralela al plano π.

b) Para $m = 2$, determinar el punto de intersección de la recta r y el plano π.

----

a)

La recta r es paralela al plano π cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = \left(1, 1, \frac{-3}{m}\right)$.

Un vector normal de π es $\vec{n} = (2, 1, 1)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \left(1, 1, \frac{-3}{m}\right) \cdot (2, 1, 1) = 0;\;\; 2 + 1 - \frac{3}{m} = 0;\;\; 3m - 3 = 0;$

$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1.$

$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ perpendiculares\ cuando\ m = 1}.$

b)

Para $m = 2$ la recta es $r \equiv x = y + 1 = \frac{z - \frac{11}{2}}{\frac{-3}{2}}$ o mejor $r \equiv x = y + 1 = \frac{2z - 11}{-3}$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}\lambda \end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x + y + z = 9 \\ r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\lambda + (-1 + \lambda) + \left(\frac{11}{2} - \frac{3}{2}\lambda\right) = 9;$$

$2\lambda - 1 + \lambda + \frac{11}{2} - \frac{3}{2}\lambda = 9;\;\; 3\lambda + \frac{11}{2} - \frac{3}{2}\lambda = 10;\;\; 6\lambda + 11 - 3\lambda = 20;\;\; 3\lambda = 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -1 + 3 = 2 \\ z = \frac{11}{2} - \frac{9}{2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P(3, 2, 1)}.$$

****