PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CANARIAS

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

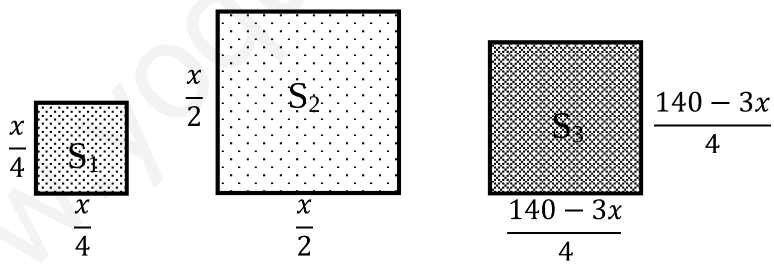
MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo.

OPCIÓN A

1º) Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 m. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de forma que la longitud de uno de los trozos sea el doble de la longitud de otro y tal que, al construir con cada uno de los tres trozos del hilo un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encontrar la longitud de cada trozo.

Sean las longitudes de los trozos $x, (2x)\ y\ (140-3x)$.



Del enunciado del problema y de la observación de la figura se deduce que:

$$S_t = S(x) = S_1 + S_2 + S_3 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{140-3x}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{4} + \frac{19.600-840x+9x^2}{16} = \frac{x^2+4x^2+19.600-840x+9x^2}{16} = \frac{14x^2-840x+19.600}{16} =$$

$$= \frac{7x^2-420x+9.800}{8} = S(x).$$

La superficie es mínima cuando se anula su primera derivada:

$$S'(x) = \frac{1}{8}(14x-420) = \frac{1}{4}(7x-210) = \frac{7}{4}(x-30).$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{7}{4}(x - 30) = 0; \;\; x - 30 = 0 \Rightarrow x = 30.$$

Para justificar que se trata de un mínimo, la segunda derivada tiene que ser positiva para el valor encontrado de x que anula la primera derivada:

$$S''(x) = \frac{7}{4} > 0 \Rightarrow Mínimo, como\ se\ quería\ justificar.$$

$$\ell_1 = 30. \;\; \ell_2 = 2 \cdot 30 = 60. \;\; \ell_3 = 140 - 3 \cdot 30 = 140 - 90 = 50.$$

$$\underline{Los\ lados\ de\ los\ cuadrados\ son\ 30, 60\ y\ 50\ metros, respectivamente.}$$

****

2º) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + ky + kz = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro k.

b) Resolver el sistema para $k = 1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & k & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2k + k - k - 2 - 4k = 2 - 2k = 0 \Rightarrow k = 1.$$

$$\underline{Para\ k \neq 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ k = 1 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow Rang\ A' = 2.$$

$$\underline{Para\ k = 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

b)

Para $k = 1$ el sistema es $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$, equivalente a $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Haciendo $z = \lambda$: $\left.\begin{array}{r} x + y = 1 - \lambda \\ x + 2y = 2 - 4\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x - y = -1 + \lambda \\ x + 2y = 2 - 4\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow y = 1 - 3\lambda.$

$$x + y = 1 - \lambda \Rightarrow x = 1 - \lambda - 1 + 3\lambda = 2\lambda.$$

$$\underline{Solución: x = 2\lambda,\ \ y = 1 - 3\lambda,\ \ z = \lambda, \forall \lambda \in R.}$$

****

3º) a) Halla la ecuación del plano π que pasa por los puntos $A(-1,5,0)$ y $B(0,1,1)$ y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x+2y-3=0 \\ 2y-3z-1=0 \end{cases}$.

b) Escribir la ecuación de una recta s paralela a la recta r y que pase por el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

----

a)

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{AB} = [B-A] = (1,-4,1)$.

Un vector director de una recta dada por la intersección de dos planos es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan.

$$r \equiv \begin{cases} 3x+2y-3=0 \\ 2y-3z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \overrightarrow{n_1} = (3,2,0) \\ \overrightarrow{n_2} = (0,2,-3) \end{Bmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{v'_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -6i + 6k + 9j = -6i + 9j + 6k \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2,-3,-2).$$

La ecuación general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi(B;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{AB}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-3x - 2(y-1) - 8(z-1) + 3(z-1) - 8x - 2(y-1) = 0;$$

$$-11x - 4(y-1) - 5(z-1) = 0;\ \ 11x + 4y - 4 + 5z - 5 = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv 11x + 4y + 5z - 9 = 0}.$$

b)

El punto medio del segmento de extremos los puntos $A(-1,5,0)$ y $B(0,1,1)$ es $M\left(-\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{2}\right)$.

La recta pedida s, por ser paralela a la recta r, tiene como vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente del vector director de r.

La recta s dada por unas ecuaciones paramétrica es: $\underline{s \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + 2\lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = \frac{1}{2} - 2\lambda \end{cases}}$.

****

4º) Se sabe que el 30 % de todos los fallos en las tuberías de plantas químicas son ocasionados por errores del operador.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 fallos en la planta química, exactamente 5 se deban a errores del operador?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 o más fallos de 20 encontrados en una planta química, se deban a errores del operador.

----

a)

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 20;\ \ p = 0{,}3;\ \ q = 0{,}7;\ \ r = 5.$

Sabiendo que la fórmula de la probabilidad de una distribución binomial es $P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$, la probabilidad pedida es:

$$P = \binom{20}{5} \cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^{15} = \frac{20!}{(20-5)! \cdot 5!} \cdot 0{,}00243 \cdot 0{,}00475 =$$

$$= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 0{,}000011536 = 19 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 0{,}000011536 = \underline{0{,}1789}.$$

b)

El suceso contrario a “que existan 2 o más fallos” es “que existan cero o un fallos”, por lo cual, la probabilidad pedida es la siguiente:

$$P = 1 - [P(0) + P(1)] = 1 - \left[\binom{20}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^{19}\right] =$$

$$= 1 - (1 \cdot 1 \cdot 0{,}000798 + 20 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}001140) = 1 - (0{,}000798 + 0{,}006839) =$$

$$= 1 - 0{,}007637 = \underline{0{,}9924}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Calcular las asíntotas y los extremos relativos de la función $y = f(x) = 3x + \frac{3x}{x-1}$.

$$y = f(x) = 3x + \frac{3x}{x-1} = \frac{3x^2-3x+3x}{x-1} = \frac{3x^2}{x-1}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x-1} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \ \Rightarrow \ \underline{La\ recta\ x = 1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Tendencias: $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty.$ $\qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty.$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right].$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2-x} = 3.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2}{x-1} - 3x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-3x^2+3x}{x-1} = 3.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 3x + 3\ es\ asíntota\ oblícua\ de\ la\ función.}$$

Para que una función tenga un extremo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0; \ \ x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada:

si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-x(x-2)[2\cdot(x-1)\cdot 1]}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)(x-1)-2x(x-2)}{(x-1)^3}=$$

$$=\frac{2(x^2-2x+1)-2x^2+4x}{(x-1)^3}=\frac{2x^2-4x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

$$f''(0)=\frac{2}{(0-1)^3}=\frac{2}{-1}=-2<0\Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x=0.$$

$$f(0)=\frac{0}{-1}=0\ \Rightarrow\ \underline{Máximo\colon O(0,0)}.$$

$$f''(2)=\frac{2}{(2-1)^3}=\frac{2}{1}=2>0\Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x=2.$$

$$f(2)=\frac{3\cdot 2^2}{2-1}=\frac{12}{1}=12\ \Rightarrow\ \underline{Mínimo\colon P(2,12)}.$$

****

2º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 2 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Calcular los valores del parámetro m para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Para $m = 1$, calcular la matriz inversa A^{-1}.

----

a)

Una matriz tiene inversa (es invertible) cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 2 \\ m-2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (m+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m-2 & 0 \end{vmatrix} = (m+1)(m-2) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow m_1 = -1, m_2 = 2.$

$$\underline{La\ matria\ A\ es\ invertible\ \forall m \in R - \{-1, 2\}}.$$

b)

Para $m = 1$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_3 \to F_3 + F_1 \\ F_2 \to \frac{1}{2}F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to -F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to F_1 + F_3 \\ F_2 \to F_2 - F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

****

3º) Dados los planos $\pi_1 \equiv x+y+z-5=0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x=3+\lambda+2\mu \\ y=1-\lambda-\mu \\ z=1+\mu \end{cases}$:

a) Comprobar que los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta. Hallar la ecuación de dicha recta en forma de unas ecuaciones paramétricas.

b) Hallar la ecuación del plano π_3 que pasa por el origen y es perpendicular a los planos π_1 y π_2.

----

a)

Un punto del plano π_2 es $P(3,1,1)$.

Dos vectores del plano π_2 son $\vec{u}=(1,-1,0)$ y $\vec{v}=(2,-1,1)$.

La expresión general del plano π_2 es la siguiente:

$$\pi_2(P;\ \vec{u},\vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-(x-3)-(z-1)+2(z-1)-(y-1)=0;\ \ (x-3)+(y-1)-(z-1)=0;$$

$$x-3+y-1-z+1=0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x+y-z-3=0.$$

Dos vectores normales de los planos π_1 y π_2 son, respectivamente, los vectores $\overrightarrow{n_1}=(1,1,1)$ y $\overrightarrow{n_2}=(1,1,-1)$.

Los vectores $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes, por lo cual:

$\underline{\textit{Los planos } \pi_1 \textit{ y } \pi_2 \textit{ se cortan en una recta, como se quería comprobar.}}$

La recta r en que se cortan los planos es $r \equiv \begin{cases} x+y+z-5=0 \\ x+y-z-3=0 \end{cases}$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-5=0 \\ x+y-z-3=0 \end{cases} \Rightarrow x=\lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} y+z=5-\lambda \\ y-z=3-\lambda \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} y+z=5-\lambda \\ -y+z=-3+\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2z=2;\ \ z=1.\ \ y+1=5-\lambda;\ \ y=4-\lambda.$$

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=4-\lambda. \\ z=1 \end{cases}}$$

$b)$

El vector normal del plano π_3 es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos π_1 y π_2.

$$\overrightarrow{n_1} = (1, 1, 1) \; y \; \overrightarrow{n_2} = (1, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -i + j + k - k - i + j = -2i + 2j \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (1, -1, 0).$$

$$\underline{\pi_3 \equiv x - y = 0}.$$

****

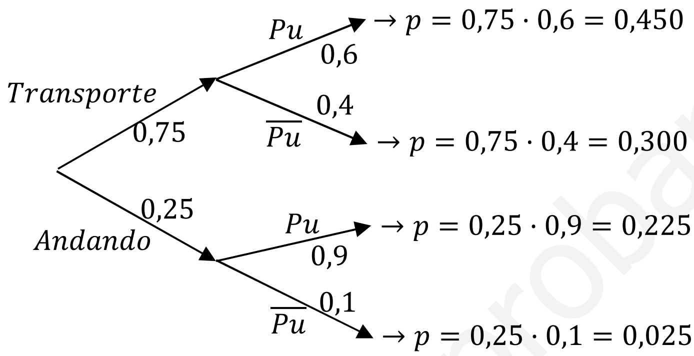
4º) El 75 % de los alumnos de un instituto acude a clase en algún tipo de transporte y el resto acude andando. Por otra parte, llegan puntual a clase el 60 % de los que utilizan transporte y el 90 % de los que acuden andando. Se pide:

a) Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya llegado puntual a clase?

b) Si se elige un alumno al azar un alumno que ha llegado puntual a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya acudido andando?

----

a)



$$P = P(Pu) = P(T \cap Pu) + P(A \cap Pu) =$$

$$= P(T) \cdot P(Pu/T) + P(A) \cdot P(Pu/A) = 0{,}75 \cdot 0{,}6 + 0{,}25 \cdot 0{,}9 =$$

$$= 0{,}450 + 0{,}225 = \underline{0{,}675}.$$

b)

$$P = P(A/Pu) = \frac{P(A \cap Pu)}{P(Pu)} = \frac{P(A) \cdot P(Pu/A)}{P(T) \cdot P(Pu/T) + P(A) \cdot P(Pu/A)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}9}{0{,}75 \cdot 0{,}6 + 0{,}25 \cdot 0{,}9} =$$

$$= \frac{0{,}225}{0{,}450 + 0{,}225} = \frac{0{,}225}{0{,}675} = \frac{225}{675} = \underline{\frac{1}{3} = 0{,}3333}.$$

****