PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

SEPTIEMBRE – 2020

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Instrucciones:
Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se permite el uso de calculadoras científica, no programable ni con conexión a internet.

GRUPO A

1º) Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) Calcule: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot cos\ x \cdot dx$.

b) Halle las asíntotas de la función: $f(x) = \frac{x^3+5x^2}{x^2-1}$.

----

a)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot cos\ x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x \rightarrow du = dx \\ cos\ x \cdot dx = dv \rightarrow v = sen\ x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x \cdot sen\ x - \int sen\ x \cdot dx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = [x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - (0 \cdot \operatorname{sen} 0 + \cos 0) = \frac{\pi}{2} \cdot 1 + 0 - 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$\underline{I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot cos\ x \cdot dx = \frac{\pi-1}{2}}.$$

b)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3+5x^2}{x^2-1} = \pm\infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \underline{Las\ rectas\ x = -1\ y\ x = 1\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3+5x^2}{x^2-1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3+5x^2}{x^3-x^2} = 1.$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3+5x^2}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3+5x^2-x^3+x}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{5x^2+x}{x^2-1} = 5.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua: y = x + 7}.$$

****

2º) Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.
Se plantea la siguiente ecuación matricial: $X \cdot A - C^t = X \cdot B$.

a) Justifique razonadamente cuál es la dimensión de la matriz X.

b) Halle la matriz X que cumple la ecuación.

----

a)

Para que dos matrices se puedan sumar o restar es necesario que tengan la misma dimensión, por lo cual, la dimensión del producto $X \cdot A$ tiene que ser la misma que la dimensión de C.

Para que el producto de matrices sea posible es necesario que el número de columnas de la matriz multiplicando sea igual al número de filas de la matriz multiplicador siendo las dimensiones de la matriz producto el número de filas de la primera y el número de columnas de la segunda: $X_{(a,b)} \cdot N_{(b,m)} = P_{(a,m)}$.

En el caso que nos ocupa es $X_{(a,b)} \cdot A_{(3,3)} = C^t{}_{(2,3)} \Rightarrow \underline{X_{(2,3)}}$.

b)

$X \cdot A - C^t = X \cdot B;\ X \cdot A - X \cdot B = C^t;\ X \cdot (A - B) = C^t;$

$X \cdot (A - B) \cdot (A - B)^{-1} = C^t \cdot (A - B)^{-1};\ X \cdot I = C^t \cdot (A - B)^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{X = C^t \cdot (A - B)^{-1}}$.

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene la inversa de $(A - B)$ por el método de Gauss-Jordan.

$$(A - B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to -F_1 \\ F_2 \to -F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = C^t \cdot (A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

****

3º) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$, y dado el plano $\pi \equiv x - 3y + 5z = 2$.

a) ¿Cuál es la posición relativa de la recta r y el plano π.

b) Calcular el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

----

a)

La expresión de r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = -2y + 4 \\ x = -2z + 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ x + 2z - 4 = 0 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ x + 2z = 4 \\ x - 3y + 5z = 2 \end{array}\right\}.$

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $M\ y\ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

$1 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow La\ recta\ está\ contenida\ en\ el\ plano.$

$2 \rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ es\ paralela\ al\ plano.$

$3 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 4 + 6 - 10 \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

$$Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 8 + 12 - 4 = 4 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos.}$

b)

El vector normal del plano $\pi \equiv x - 3y + 5z = 2$ es $\vec{n} = (1, -3, 5)$.

Un punto y un vector director de de la recta r son $P(0,2,2)$ y $\overrightarrow{v_r}=(-2,1,1)$.

$$\pi'(P;\ \overrightarrow{v_r},\vec{n}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$5x+(y-2)+6(z-2)-(z-2)+3x+10(y-2)=0;$$

$$8x+11(y-2)+5(z-2)=0;\ \ 8x+11y-22+5z-10=0.$$

$$\underline{\pi' \equiv 8x+11y+5z-32=0}.$$

****

4º) Si una bombilla fluorescente presenta un 90 % de posibilidades de tener una vida útil de al menos 800 horas, seleccionando 20 bombillas fluorescentes de este tipo, justificar si las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) Al seleccionar exactamente 18 bombillas fluorescentes, más del 30 % tienen una vida útil de al menos 800 horas.

b) La probabilidad de que dos bombillas fluorescentes o menos NO tengan una duración de al menos 800 horas es menor que 0,7.

c) El valor esperado de bombillas con una vida útil de al menos 800 horas si se toma una muestra de 100 bombillas fluorescentes es igual a 10.

----

a)

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$p = P(X \geq 800) = 0{,}9;\ \ q = 1 - p = 0{,}1;\ \ n = 20;\ \ r = 18.$$

La fórmula de la probabilidad de que de n elementos r sean favorables es la siguiente: $P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

$$\left.\begin{matrix} n = 20 \\ r = 18 \end{matrix}\right\} \Rightarrow p = \binom{20}{18} \cdot 0{,}9^{18} \cdot 0{,}1^2 = \frac{20!}{2! \cdot 18!} \cdot 0{,}1501 \cdot 0{,}01 = \frac{2 \cdot 19}{2} \cdot 0{,}015 =$$

$$= 19 \cdot 0{,}015 = 0{,}285 = 28{,}5\ \% < 30\ \%.$$

$$\underline{Lo\ pedido\ es\ falso}.$$

b)

La probabilidad de que dos bombillas fluorescentes o menos NO tengan una duración de al menos 800 horas es menor que 0,7 es equivalente a que 18 bombillas o más de las 20 tengan una vida útil mayor o igual de 800 horas.

$$p = P(X \geq 18) = P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20) =$$

$$= \binom{20}{18} \cdot 0{,}9^{18} \cdot 0{,}1^2 + \binom{20}{19} \cdot 0{,}9^{19} \cdot 0{,}1^1 + \binom{20}{20} \cdot 0{,}9^{20} \cdot 0{,}1^0 =$$

$$= 0{,}2850 + 20 \cdot 0{,}1351 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}1216 \cdot 1 = 0{,}2850 + 0{,}2702 + 0{,}1216 =$$

$$= 0{,}6768 < 0{,}7.$$

$$\underline{Lo\ pedido\ es\ cierto}.$$

c)

$$Datos: n = 100;\ \ p = 0{,}9.$$

El número esperado de bombillas cuya duración sea de al menos 800 horas se obtiene multiplicando la probabilidad por el número de bombillas:

$$n' = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}9 = 90\ bombillas.$$

$$\underline{Es\ falso\ que\ el\ n\text{ú}mero\ de\ bombillas\ esperado\ sea\ de\ 10}.$$

****

GRUPO B

1º) Halle los valores de a y b para que la recta de ecuación $y = 6x + a$ sea tangente a la curva $f(x) = \frac{bx-1}{bx+1}$ en el punto de abscisa $x = 0$. Escriba las funciones que se obtienen.

La pendiente de la recta $y = 6x + a$ es $m = 6$.

La pendiente de la tangente de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{b \cdot (bx+1) - (bx-1) \cdot b}{(bx+1)^2} = \frac{b^2x + b - b^2x + b}{(bx+1)^2} = \frac{2b}{(bx+1)^2}.$$

$$m = f'(0) = 6 \Rightarrow \frac{2b}{(b \cdot 0 + 1)^2} = 6; \quad \frac{2b}{1} = 6 \Rightarrow \underline{b = 3}.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(0) = \frac{b \cdot 0 - 1}{b \cdot 0 + 1} = -1 \Rightarrow P(0, -1)$.

La ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$$y + 1 = 6(x - 0) = 6x \Rightarrow \underline{t \equiv y = 6x - 1 = 0}. \qquad \underline{a = -1}.$$

****

2º) Sea el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{matrix} kx+2y+6z=0 \\ 2x+ky+4z=2 \\ 2x+ky+6z=k-2 \end{matrix}\right\}$.

a) Discuta el sistema según los valores del parámetro k.

b) Resuelva el sistema para $k=0$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} k & 2 & 6 \\ 2 & k & 4 \\ 2 & k & 6 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} k & 2 & 6 & 0 \\ 2 & k & 4 & 2 \\ 2 & k & 6 & k-2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} k & 2 & 6 \\ 2 & k & 4 \\ 2 & k & 6 \end{vmatrix}=6k^2+12k+16-12k-4k^2-24=0;$$

$2k^2-8=0;\ \ k^2-4=0 \Rightarrow k_1=-2, k_2=2.$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} k\neq -2 \\ k\neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ k=-2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 32+24+24+48=128\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ k=-2 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ k=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ k=2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

b)

Para $k=0$ el sistema resulta $\begin{cases} 2y+6z=0 \\ 2x+4z=2 \\ 2x+6z=-2 \end{cases}$, que es compatible determinado y equivalente al sistema $\begin{cases} y + 3z = 0 \\ x + 2z = 1 \\ x + 3z = -1 \end{cases}$.

Restando a la tercera ecuación la segunda: $z = -2$.

$x - 6 = -1 \Rightarrow x = 5$. $\quad y - 6 = 0 \Rightarrow y = 6$.

$\underline{Solución: x = 5;\ \ y = 6;\ \ z = -2}$.

****

3º) Consideramos el punto $A(1,2,1)$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=5 \\ 3y+z=14 \end{cases}$.

a) Encuentre la ecuación del plano π que contiene al punto A y es perpendicular a la recta r.

b) Consideremos $P(1,4,2)$, un punto de la recta r, y sea s la recta determinada por los puntos A y P. Calcule el ángulo que forman las rectas $r\ y\ s$.

----

a)

La expresión de la recta r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+y=5 \\ 3y+z=14 \end{cases} \Rightarrow y=\lambda;\ \ x=5-\lambda;\ \ z=14-3\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=5-\lambda \\ y=\lambda \\ z=14-3\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $Q(5,0,14)$ y $\overrightarrow{v_r}=(1,-1,3)$.

El haz de planos β perpendiculares a la recta r tienen la siguiente expresión general: $\beta \equiv x-y+3z+D=0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π que contiene al punto $A(1,2,1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv x-y+3z+D=0 \\ A(1,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1-2+3\cdot 1+D=0;\ \ 1-2+3+D=0;$$

$2+D=0;\ \ D=-2\ \Rightarrow\ \underline{\pi \equiv x-y+3z-2=0}.$

b)

Un vector director de la recta s es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector que forman los puntos $A(1,2,1)\ y\ P(1,4,2)$, que es el siguiente:

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=[(1,4,2)-(1,2,1)]=(0,2,1) \Rightarrow \overrightarrow{v_s}=(0,2,1).$$

El ángulo que forman dos rectas es el mismo que forman sus vectores directores.

$$\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}=|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{v_s}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}}{|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{v_s}|}=\frac{(1,-1,3)\cdot(0,2,1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{0^2+2^2+1^2}}=$$

$$=\frac{0-2+3}{\sqrt{1+1+9}\cdot\sqrt{0+4+1}}=\frac{1}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{55}}=0{,}1348 \Rightarrow \alpha=82^\circ\ 15'\ 2''.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ forman\ un\ \acute{a}ngulo\ de\ 82^\circ\ 15'\ 02''.}$$

****

4º) Mi despertador no funciona muy bien, pues el 20 % de las veces no suena. Cuando suena, llego tarde a clase el 20 % de las veces; pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde a clase es 0,9.

a) Represente el diagrama del árbol del problema.

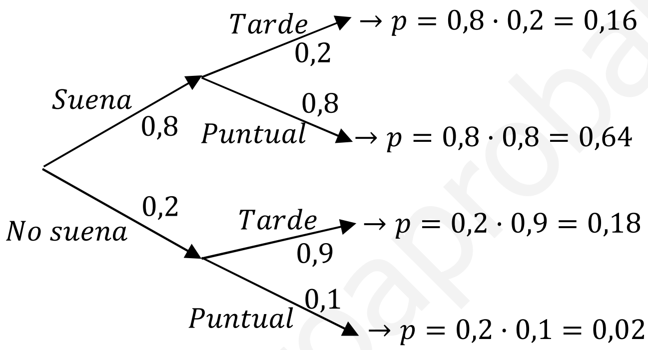
b) Justifique si el porcentaje de veces que llego tarde a clase y ha sonado el despertador es mayor que el 20 %.

c) Justifique si la probabilidad de que no llegue tarde a clase es menor que 0,5.

d) Si un día llego tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador?

----

a)



b)

$$P = P(Su \cap Ta) = P(Su) \cdot P(Ta/So) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16 < 0{,}2 = 20\ \%.$$

$$\underline{Llego\ tarse\ sonando\ el\ despertador\ menos\ del\ 20\ \%\ de\ las\ veces.}$$

c)

$$P = P(Pu) = P(Su \cap Pu) + P\left(\overline{Su} \cap Pu\right) =$$

$$= P(Su) \cdot P(Pu/Su) + P\left(\overline{Su}\right) \cdot P\left(Pu/\overline{Su}\right) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 =$$

$$= 0{,}64 + 0{,}02 = 0{,}66.$$

$$\underline{Llego\ puntualmente\ más\ del\ 50\ \%\ de\ las\ veces.}$$

d)

$$P(Su/Ta) = \frac{P(Su \cap Ta)}{P(Ta)} = \frac{P(Su) \cdot P(Ta/Su)}{1 - P(Pu)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{1 - 0{,}66} = \frac{0{,}16}{0{,}34} = \underline{0{,}4706}.$$

****