PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

SEPTIEMBRE – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano Corbacho)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contestad de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Podéis utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) Determinar una matriz X que verifique:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcular, si es posible, la matriz inversa de X.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$M \cdot X = N \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \; N = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} \cdot M \cdot X = M^{-1} \cdot N; \; I \cdot X = M^{-1} \cdot N \Rightarrow \underline{X = M^{-1} \cdot N}.$$

Se obtiene la inversa de M por el método de Gauss-Jordan.

$$(M|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to \frac{1}{2}F_2 \\ F_3 \to \frac{1}{3}F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$X = M^{-1} \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & \frac{11}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & \frac{11}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}}$$

****

2º) El rendimiento de los trabajadores de una fábrica (valorado en una escala de 0 a 100), durante una jornada de 8 horas, viene dado por la siguiente función:

$$r(t)=\begin{cases}-10t^2+60t & si\ \ 0\le t<4 \\ 80 & si\ 4\le t<6 \\ 170-15t & si\ \ 6\le t\le 8\end{cases}$$, donde t es el tiempo en horas.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento ¿Cuál es el rendimiento máximo?

b) ¿En qué instantes de la jornada laboral el rendimiento se sitúa en la mitad de la escala?

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$r'(t)=\begin{cases}-20t+60 & si\ \ 0\le t<4 \\ 0 & si\ 4\le t<6 \\ -15 & si\ \ 6\le t\le 8\end{cases}.$$

$-20t+60=0;\ -t+3=0;\ \ t=3.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función $r(t)$, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: r'(t)>0 \Rightarrow t\epsilon(0,3)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: r'(t)<0 \Rightarrow t\epsilon(3,4)\cup(6,6)}.$$

$$\underline{En\ el\ intervalo\ (4,6)\ la\ función\ r(t)\ es\ constante}.$$

b)

$Intervalo\ [0,4): -10t^2+60t=50;\ \ -t^2+6t-5=0;\ \ t^2-6t+5=0;$

$t=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{6\pm4}{2}=3\pm2\Rightarrow t_1=1;\ t_2=5\notin(0,4).$

$Intervalo\ [6,8]:\ 170-15t=50;\ \ 15t=120;\ \ t=\frac{120}{15}=8.$

$$\underline{El\ rendimiento\ se\ situa\ en\ la\ mitad\ de\ la\ escala\ para\ t=1\ y\ para\ t=8}.$$

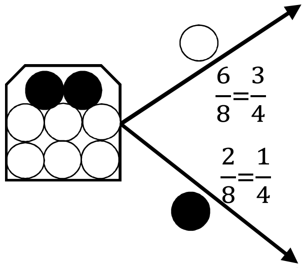
****

3º) Una urna contiene 6 bolas blancas y 2 negras. Se dispone además de una baraja española (1) de 48 cartas y de una baraja de póquer o francesa (2) de 52 cartas. Se extrae una bola al azar. Si es blanca se extrae al azar una carta de la baraja española. Si es negra se extrae al azar una carta de la baraja de póquer.

a) Calcular la probabilidad de que la carta extraída sea figura.

b) Si la carta extraída ha sido figura, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra?

(1) La baraja española tiene 48 naipes, repartidos entre cuatro palos: oros, copas, espadas y bastos. La baraja de 48 cartas está numerada del 1 (as) al 9, siendo las figuras el 10 (sota), el 11 (caballo) y 12 (rey).
(2) La baraja francesa consta de 52 cartas distribuidas entre 4 palos (corazones, diamantes, picas y tréboles) siendo numeradas del 1 (as) al 10 y seguidas por las figuras que llevan la J (de voz inglesa jack o paje), la Q (de queen o reina) y la K (de king o rey).



$$\begin{cases} Figura \Rightarrow p = \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{48} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16} \\ No\ figura \Rightarrow p = \frac{3}{4} \cdot \frac{36}{48} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Figura \Rightarrow p = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{52} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{13} = \frac{3}{52} \\ No\ figura \Rightarrow p = \frac{1}{4} \cdot \frac{40}{52} = \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{13} = \frac{5}{26} \end{cases}$$

a)

$$P = P(F) = P(B \cap F) + P(N \cap F) = P(B) \cdot P(F/B) + P(N) \cdot P(F/N) =$$

$$= \frac{6}{8} \cdot \frac{12}{48} + \frac{2}{8} \cdot \frac{12}{52} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{13} = \frac{3}{16} + \frac{3}{52} = \frac{39+12}{208} = \underline{\frac{51}{208} = 0{,}2452}.$$

b)

$$P = P(N/F) = \frac{P(N \cap F)}{P(F)} = \frac{P(N) \cdot P(F/N)}{P(B) \cdot P(F/B) + P(N) \cdot P(F/N)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{13}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{13}} = \frac{\frac{3}{52}}{\frac{3}{16} + \frac{3}{52}} = \frac{\frac{3}{52}}{\frac{39+12}{208}} =$$

$$= \frac{3 \cdot 208}{52 \cdot 51} = \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 17} = \underline{\frac{4}{17} = 0{,}2353}.$$

****

4º) A lo largo de las diferentes pruebas de acceso a la universidad (PAUs) se ha observado que la distribución de las calificaciones de la asignatura MACSH sigue una ley normal de media 5,3 y desviación típica 0,8.

a) Cuál es la probabilidad de que una muestra de 49 alumnos tenga una media superior a 5,7?

b) ¿Cuál es la probabilidad que un alumno escogido al azar suspenda la asignatura MACSH, entendiendo por suspender obtener una calificación menor que 5 puntos?

----

a)

$Datos$: $\mu = 5{,}3;\ \ n = 49;\ \ \sigma = 0{,}8.$

$$X \to N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(5{,}3;\ \frac{0{,}8}{\sqrt{49}}\right) = N(5{,}3;\ 0{,}11).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-5{,}3}{0{,}11}$.

$$P = P(X > 5{,}7) = P\left(Z > \frac{5{,}7-5{,}3}{0{,}11}\right) = P\left(Z > \frac{0{,}4}{0{,}11}\right) = P(Z > 3{,}64) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 3{,}64) = 1 - 0{,}9999 = \underline{0{,}0001}.$$

b)

$Datos$: $\mu = 5{,}3;\ \ n = 1;\ \ \sigma = 0{,}8.$

$$X \to N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(5{,}3;\ \frac{0{,}8}{\sqrt{1}}\right) = N(5{,}3;\ 0{,}8).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-5{,}3}{0{,}8}$.

$$P = P(X < 5) = P\left(Z < \frac{5-5{,}3}{0{,}8}\right) = P\left(Z < \frac{-0{,}3}{0{,}8}\right) = P(Z < -0{,}375) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0{,}375) = 1 - 0{,}6461 = \underline{0{,}3539}.$$

****

OPCIÓN B

1º) El administrador de la comunidad de vecinos quiere saber qué cobra a la hora un electricista, un fontanero y un albañil. Para eso, sabe que:

--- En el 4ºB, el electricista estuvo 1 hora y el albañil 2 horas, y tuvieron que pagar 78 euros de mano de obra.

--- En el 3ºA, pagaron 85 euros por las dos horas que estuvo el fontanero y la hora que estuvo el albañil.

--- En el 1ºA, mi casa, estuvo 1 hora el fontanero, 1 hora el electricista y 3 horas el albañil, y nos cobraron 133 euros.

¿Cuánto cobra por hora cada profesional?

Sean x, y, z lo que cobran en una hora de trabajo el electricista, el fontanero y el albañil, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+2z=78 \\ 2y+z=85 \\ x+y+3z=133 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+2z=78 \\ 2y+z=85 \\ x+y+3z=133 \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{Restanto a la } 3^{\underline{a}} \textit{ ecuación la } 1^{\underline{a}}:$$

$$\left.\begin{array}{r} 2y+z=85 \\ y+z=55 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2y+z=85 \\ -y-z=-55 \end{array}\right\} \Rightarrow y=30;\ \ 30+z=55;\ \ z=25.$$

$$x+2\cdot 25=78;\ \ x=78-50=28.$$

$$\underline{\textit{El electricista cobra por hora } 28 \textit{ euros, el fontanero } 30 \textit{ y el albañil } 25.}$$

****

2º) Dos grupos diferentes, G1 y G2, de la misma empresa pueden llevar a término un proyecto de jardinería. Se trata de ajardinar tres zonas: A, B y C. En la tabla siguiente se recoge el número de unidades que puede ajardinar cada grupo durante una semana:

	Zona A	Zona B	Zona C
Grupo G1	4	10	7
Grupo G2	10	5	7

Han de ajardinar un mínimo de 40 unidades de la zona A, 50 unidades de la zona B y 49 unidades de la zona C, y el coste semanal se estima en 3.300 euros para el grupo G1 y en 4.000 euros para el grupo G2.
¿Cuántas semanas tendrá que trabajar cada grupo para acabar el proyecto con el coste mínimo? Se tiene que plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinando y dibujando sus vértices.

Sean $x \; e \; y$ las semanas que trabajan los grupos G1 y G2, respectivamente.

El sistema de inecuaciones es: $\left.\begin{array}{r} 4x+10y \geq 40 \\ 10x+5y \geq 50 \\ 7x+7y \geq 49 \\ x \geq 0; \;\; y \geq 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+5y \geq 20 \\ 2x+y \geq 10 \\ x+y \geq 7 \\ x \geq 0; \;\; y \geq 0 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow 2x+5y \geq 20 \Rightarrow y \geq \frac{20-2x}{5} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	10	0
y	0	4

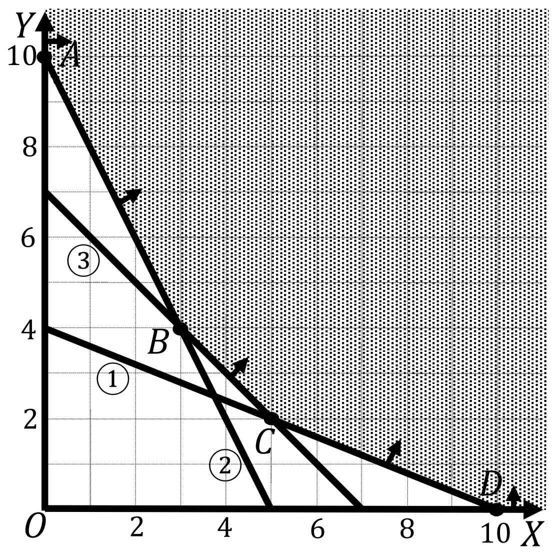
② $\Rightarrow 2x+y \geq 10 \Rightarrow y \geq 10-2x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	0	5
y	10	0

③ $\Rightarrow x+y \geq 7 \Rightarrow y \geq 7-x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	0	7
y	7	0

La región factible, que es abierta, es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 2x+y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,10).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=10 \\ x+y=7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+y=10 \\ -x-y=-7 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=3; \;\; y=4 \Rightarrow B(4,3).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+5y=20 \\ x+y=7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+5y=20 \\ -2x-2y=-14 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y = 6;\ \ y = 2;\ \ x = 5 \Rightarrow C(5, 2).$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2x + 5y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 20;\ \ x = 10 \Rightarrow D(10, 0).$$

La función de objetivos cuando lo que se pretende es determinar el mínimo consumo es $f(x, y) = 3.300x + 4.000y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 10) = 3.300 \cdot 0 + 4.000 \cdot 10 = 0 + 40.000 = 40.000.$

$B \Rightarrow f(4, 3) = 3.300 \cdot 4 + 4.000 \cdot 3 = 13.200 + 12.000 = 25.200.$

$C \Rightarrow f(5, 2) = 3.300 \cdot 5 + 4.000 \cdot 2 = 16.500 + 8.000 = 24.500.$

$D \Rightarrow f(10, 0) = 3.300 \cdot 10 + 4.000 \cdot 0 = 33.000 + 0 = 33.000.$

El valor mínimo se produce en el punto $B(4, 3)$.

$\underline{El\ grupo\ G1\ tiene\ que\ trabajar\ cuatro\ semanas\ y\ el\ grupo\ G2\ tres\ semanas}.$

****

3º) Considerar la función $h(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

a) Calcular una primitiva de la función $h(x)$.

b) Calcular la siguiente integral definida: $I=\int_0^{L2}\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot dx$, y comprobar que su valor es $\frac{3}{4}$.

----

a)

$$H(x)=\int\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot\int e^x\cdot dx+\frac{1}{2}\cdot\int e^{-x}\cdot dx=\frac{e^x}{2}+\frac{1}{2}\cdot A. \quad (*)$$

$$A=\int e^{-x}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix}-x=t\\ dx=-dt\end{matrix}\right\}\Rightarrow-\int e^t\cdot dt=-e^t+C=-e^{-x}+C.$$

Sustituyendo el valor obtenido de A en la expresión (*):

$$H(x)=\frac{e^x}{2}+\frac{1}{2}\cdot(-e^{-x})+C=\frac{e^x-e^{-x}}{2}+C.$$

$$\underline{H(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}+C=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})+C.}$$

b)

$$I=\int_0^{L2}\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot[(e^x-e^{-x})]_0^{L2}=\frac{1}{2}\cdot[(e^{L2}-e^{-L2})-(e^0-e^{-0})]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{L2}-\frac{1}{e^{L2}}-1+1\right)=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}.$$

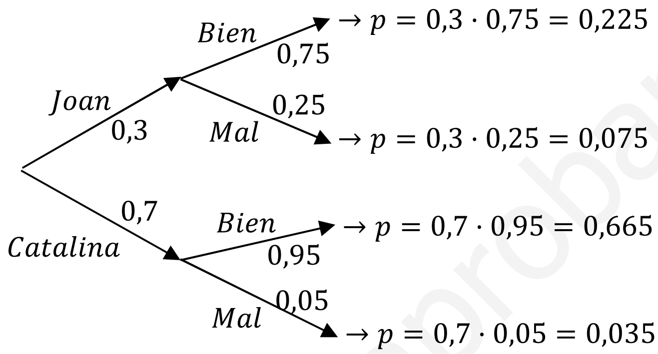
$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ I=\int_0^{L2}\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot dx=\frac{3}{4}.}$$

****

4º) Un restaurante tiene contratados a dos camareros, Joan y Catalina, para atender el servicio de comedor. Catalina pone el servicio el 70 % de los días y se confunde al colocar la cubertería el 5 % de los días que pone el servicio. Joan, por el contrario, coloca mal alguna pieza el 25 % de los días que pone el servicio.

a) Esta mañana, el encargado del restaurante pasa revista al servicio: ¿cuál es la probabilidad de que encuentre algún servicio mal colocado?

b) Por desgracia, el encargado encontró unos cubiertos mal colocados y desea conocer la probabilidad de que haya sido Joan.



a)

$$P = P(M) = P(J \cap M) + P(C \cap M) = P(J) \cdot P(M/J) + P(C) \cdot P(M/C) =$$

$$= 0{,}3 \cdot 0{,}25 + 0{,}7 \cdot 0{,}05 = 0{,}075 + 0{,}035 = \underline{0{,}11}.$$

c)

$$P = P(J/M) = \frac{P(J \cap M)}{P(M)} = \frac{P(J) \cdot P(M/J)}{P(J) \cdot P(M/J) + P(C) \cdot P(M/C)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}25}{0{,}3 \cdot 0{,}25 + 0{,}7 \cdot 0{,}05} =$$

$$= \frac{0{,}075}{0{,}075 + 0{,}035} = \frac{0{,}075}{0{,}11} = \underline{0{,}6818}.$$

****