PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

JULIO – 2019-1

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contestad de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Podéis utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) a) Dadas A, una matriz cuadrada invertible cualquiera, y A^{-1}, su matriz inversa; ¿qué matriz se debe obtener al calcular $A \cdot A^{-1}$ y $A^{-1} \cdot A$? Indica como es ésta matriz.

b) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$:

i) Calcula los valores de x para los que se satisface $A^2 = 2A$.

ii) Para $x = -1$, calcule A^{-1}. Comprueba el resultado calculando $A \cdot A^{-1}$.

----

a)

Por definición de matriz inversa: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, siendo I la matriz unitaria del mismo orden que la matriz A.

b)

i)

$$A^2 = 2A \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 4 & x^2+4x \\ 0 & x^2+4x+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2x \\ 0 & 2x+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x^2+4x = 2x \\ x^2+4x+4 = 2x+4 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+2x = 0;$$

$x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2.$

$$\underline{A^2 = 2A \; para \; x = 0 \; y \; para \; x = -2.}$$

$ii)$

Para $x=-1$ es $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, cuya inversa es la siguiente:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{cc|cc}2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{F_1\rightarrow\frac{1}{2}F_1\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{F_1\rightarrow F_1+\frac{1}{2}F_2\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I.$$

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I.$$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I.}$

****

2º) Un artículo de consumo va a estar a la venta durante 8 años, y su precio $P(t)$ (en miles de euros) varía según el tiempo t (en años) que lleva en el mercado según la función: $P(t)=\begin{cases}\frac{1}{3}t^3+4t^2+40, & si\ 0\le t\le 6\\ -\frac{113}{14}t^2+\frac{3.826}{7}, & si\ 6<t\le 8\end{cases}$.

$a)$ ¿Cuál es el precio de salida del producto?

$b)$ ¿Es continua la función? ¿Es derivable? Determinar los intervalos donde es continua y derivable la función.

$c)$ Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento del precio del producto.

$d)$ Averigüe cuando se alcanzaron los precios máximo y mínimo y cuales fueron estos.

$a)$

$$P(0)=\frac{1}{3}\cdot 0^3+4\cdot 0^2+40=40.$$

$$\underline{El\ precio\ de\ salida\ del\ producto\ fue\ de\ 40.000\ euros}.$$

$b)$

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $P(t)$ es continua en su dominio, excepto para $t=6$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$t=6\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{t\to 6^-}P(t)=\lim\limits_{t\to 6}\left(\frac{1}{3}t^3+4t^2+40\right)=72+144+40=256=P(6)\\ \lim\limits_{t\to 6^+}P(t)=\lim\limits_{t\to 6}\left(-\frac{113}{14}t^2+\frac{3.826}{7}\right)=-\frac{2.034}{7}+\frac{3.826}{7}=\frac{1.792}{7}=256\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{t\to 6^-}P(t)=\lim_{t\to 6^+}P(t)=P(6)\Rightarrow\underline{P(t)\ es\ continua\ en\ su\ dominio}.$$

La función $P(t)$ es derivable en su dominio, excepto para $t=6$ cuya derivabilidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$P'(t) = \begin{cases} t^2 + 8t, \ si \ 0 \leq t \leq 6 \\ -\frac{113}{7}, \ si \ 6 < t \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \ P'(6^-) \neq P'(6^+) \Rightarrow.$$

$$\underline{P(t) \ es \ derivable \ en \ su \ dominio, excepto \ para \ t = 6}.$$

$c)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

La función $h(t) = t^2 + 8t$ es una parábola convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de t^2 y cuyo vértice es el siguiente:

$$P'(t) = 2t + 8 = 0 \Rightarrow t = -4 \notin D(P) \Rightarrow P'(t) > 0, \forall t \in (0, 6).$$

$$\underline{Crecimiento: P'(t) > 0 \Rightarrow t\epsilon(0, 6)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: P'(t) < 0 \Rightarrow 6\epsilon(6, 8)}.$$

$d)$

Sabemos que $P(0) = 40$ y que $P(6) = 256$.

$$P(8) = -\frac{113}{14} \cdot 8^2 + \frac{3.826}{7} = -\frac{3.316}{7} + \frac{3.826}{7} = \frac{210}{7} = 30.$$

$$\underline{El \ precio \ máximo \ se \ produce \ para \ t = 6 \ y \ su \ valor \ es \ de \ 256.000 \ euros}.$$

$$\underline{El \ precio \ mínimo \ se \ produce \ para \ t = 8 \ y \ su \ valor \ es \ de \ 30.000 \ euros}.$$

****

3º) En una máquina se han fabricado 100 piezas, de las cuales 15 han presentado algún defecto.

a) Calcula la proporción de piezas que no son defectuosas.

b) Calcula la probabilidad de que, si se cogen dos piezas al azar, ambas resulten ser defectuosas.

c) Si se toman dos piezas al azar y la primera es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de la segunda no lo sea?

$$Datos:\ n = 100;\ \ p = 0{,}15.$$

a)

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}15 = 0{,}85.$$

$$\underline{El\ 85\ \%\ de\ las\ piezas\ no\ son\ defectuosas}.$$

b)

$$P = P(DD) = 0{,}15 \cdot 0{,}15 = \underline{0{,}0225}.$$

c)

De las 100 piezas son defectuosas 15 y no defectuosas, 85.

$$P = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles} = \frac{99-14}{99} = \frac{85}{90} = \underline{0{,}9444}.$$

****

4º) El 70 % de los alumnos de bachillerato tienen móvil.

a) Si un centro tiene 1.400 alumnos de bachillerato, ¿cuántos se espera que tengan móvil?

b) ¿Cuál es la probabilidad que, en una muestra aleatoria con repetición de 150 alumnos de bachillerato, haya más de 100 con teléfono móvil?

c) ¿Cuál es la probabilidad que, en una muestra aleatoria con repetición de 200 alumnos de bachillerato, haya 140 o menos con teléfono móvil?

----

a)

$$n = p \cdot N = 0{,}7 \cdot 1.400 = 980.$$

$$\underline{Se\ espera\ que\ tengan\ móvil\ 980\ alumnos}.$$

b)

$$\mu = n \cdot p = 150 \cdot 0{,}7 = 105;\ \ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{150 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3} = 5{,}61.$$

$$X = B(150;\ 0{,}7) \approx N(105;\ 5{,}61).$$

Tipificando la variable: $X \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-105}{5{,}61}$.

Aplicando la corrección de Yates, que se utiliza cuando se usa una distribución normal, que es continua, transformando una distribución binomial, que es discreta:

$$P(X > 100) \Rightarrow P(X' > 100{,}5) = P\left(Z > \frac{100{,}5-105}{5{,}61}\right) = P\left(Z > \frac{-4{,}5}{5{,}61}\right) =$$

$$= P(Z > -0{,}80) = P(Z \leq 0{,}80) = \underline{0{,}7881}.$$

c)

$$\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}7 = 140;\ \ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{200 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3} = 6{,}48.$$

$$X = B(200;\ 0{,}7) \approx N(140;\ 6{,}48).$$

Tipificando la variable: $X \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-105}{5{,}61}$.

$$P(X \leq 140) \Rightarrow P(X' > 140{,}5) = P\left(Z \leq \frac{140{,}5-140}{5{,}61}\right) = P\left(Z \leq \frac{0{,}5}{5{,}61}\right) =$$

$$= P(Z \leq 0{,}09) = \underline{0{,}5359}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Un instituto tiene tres partidas presupuestarias: libros, material de oficina y muebles. El presupuesto para muebles del instituto es cinco veces la suma del de libros y del de material de oficina. El presupuesto de libros es el triple del de material de oficina. La suma de los presupuestos de muebles y material de oficina e 7 veces el presupuesto para libros.

a) Con los datos aportados, ¿podemos saber el dinero destinado a cada partida presupuestaria?

b) Determine las cantidades si para libros hay 2.100 euros.

----

a)

Sean x, y, z los presupuestos de libros, material de oficina y muebles que tiene el instituto, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} z=5(x+y) \\ x=3y \\ y+z=7x \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} z=5x+5y \\ x-3y=0 \\ 7x-y-z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 5x+5y-z=0 \\ x-3y=0 \\ 7x-y-z=0 \end{array}\right\}.$$

Se trata de un sistema homogéneo, que siempre admite la solución trivial que es: $x=y=z=0$, que en el caso que nos ocupa carece de sentido lógico, por lo cual:

$$\underline{Con\ los\ datos\ aportados\ no\ se\ puede\ resolver\ el\ problema\ planteado.}$$

b)

Siendo $x=2.100$ euros el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} -5y+z=10.500 \\ 2.100-3y=0 \\ y+z=14.700 \end{array}\right\}$, que tiene tres ecuaciones con dos incógnitas, que además, se deduce una de ellas: $y=700$.

Comprobando el valor de y en las otras dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} -3.500+z=10.500 \\ 700+z=14.700 \end{array}\right\} \Rightarrow z=14.000.$$

Los presupuestos del instituto son los siguientes:

$$\underline{Libros: 2.100\ euros;\ \ Material\ oficina: 700\ euros;\ Muebles: 14.00\ euros.}$$

****

2º) KSE es una empresa que fabrica dos modelos de guantes: normal y de lujo. La empresa dispone de 900 horas de tiempo del departamento de producción, 300 horas del departamento de acabado y 100 horas del departamento de empaquetado. Las horas necesarias de cada departamento por cada par de guantes y los beneficios, en euros, se dan en la tabla siguiente:

	Producción	Acabado	Empaquetado	Beneficios
Normal	1	1/2	1/8	4
De lujo	3/2	1/3	1/4	8

¿Cuántos pares de cada modelo han de fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es este beneficio? Se ha de plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinar y dibujar sus vértices.

Sean x e y el número de pares de guantes de los tipos normal y de lujo que se fabrican, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+\frac{3}{2}y \le 900 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y \le 300 \\ \frac{1}{8}x+\frac{1}{4}y \le 100 \\ x \ge 0;\;\; y \ge 0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 2x+3y \le 1.800 \\ 3x+2y \le 1.800 \\ x+2y \le 800 \\ x \ge 0;\;\; y \ge 0 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow 2x+3y \le 1.800 \Rightarrow y \le \frac{1.800-2x}{3} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	900	0
y	0	600

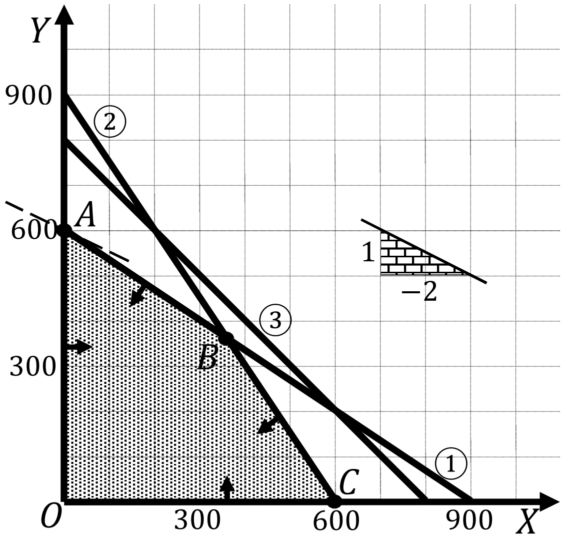
② $\Rightarrow 3x+2y \le 1.800 \Rightarrow y \le \frac{1.800-3x}{2} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	600
y	900	0

③ $\Rightarrow x+2y \le 800 \Rightarrow y \le \frac{800-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	800
y	800	0

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.



Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 2x+3y=1.800 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,600).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=1.800 \\ 3x+2y=1.800 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{r} -4x-6y=-3.600 \\ 9x+6y=5.400 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x=1.800;$

$x=\frac{1.800}{5}=360;\;\; 720+3y=1.800;\;\; 3y=1.080;\;\; y=360 \Rightarrow B(360,360).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 3x + 2y = 1.800 \end{array}\right\} \Rightarrow C(600, 0).$$

Conviene notar que el departamento de empaquetado es indiferente para el problema planteado.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 4x + 8y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 600) = 4 \cdot 0 + 8 \cdot 600 = 0 + 4.800 = 4.800.$$

$$A \Rightarrow f(360, 360) = 4 \cdot 360 + 8 \cdot 360 = 1.440 + 2.880 = 4.320.$$

$$C \Rightarrow f(600, 0) = 4 \cdot 600 + 8 \cdot 0 = 2.400 + 0 = 2.400.$$

El máximo se produce en el punto $A(0, 600)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 4x + 8y = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{8}x = -\frac{1}{2}x \Rightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

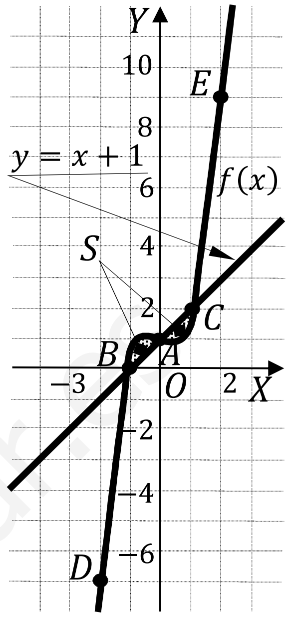
$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ fabricando\ 60\ pares\ de\ guantes\ de\ lujo.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 4.800\ euros.}$$

****

3º) Dibujar el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 + 1, g(x) = x + 1$. Calcular el área anterior.

Los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:



$$x^3 + 1 = x + 1;\ \ x^3 - x = 0;\ \ x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to A(1, 0) \\ x_2 = -1 \to B(-1, 0). \\ x_3 = 1 \to C(1, 2) \end{cases}$$

Otros puntos de la curva son $D(-2, -7)\ y\ E(2, 9)$.

La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta, de la cual se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{0} [f(x) - g(x)] \cdot dx + \int_{0}^{1} [g(x) - f(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} [(x^3 + 1) - (x + 1)] \cdot dx + \int_{0}^{1} [(x + 1) - (x^3 + 1)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x) \cdot dx + \int_{0}^{1} (x - x^3) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} =$$

$$= 0 - \left[\left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2}\right)\right] + \left[\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4}\right) - 0\right] = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{S = \frac{1}{2}\ u^2 = 0{,}5\ u^2.}$$

****

4º) Una empresa tiene dos fábricas, en la primera están el 60 % de las mujeres y en la segunda son hombres el 55 % de los trabajadores. Se coge al azar un trabajador de cada una de las fábricas para participar en el comité de empresa. Supongamos que el hecho de pertenecer a una fábrica es independiente de pertenecer a la otra. Calcular las probabilidades de los eventos siguientes:

a)

A → "Los dos son hombres". B → "Solamente uno es mujer".

C → "Los dos son mujeres".

b) Razona si el suceso contrario del evento C es el: $A, B, A \cap B, A \cup B$ o algún otro evento, y calcular sus probabilidades.

----

a)

$$Datos: \begin{cases} P(F1 \cap M) = 0{,}6;\ P(F1 \cap H) = 0{,}4 \\ P(F2 \cap M) = 0{,}45;\ P(F2 \cap H) = 0{,}55 \end{cases}.$$

$$P(A) = P(HH) = P(F1 \cap H) \cdot P(F2 \cap H) = 0{,}4 \cdot 0{,}55 = \underline{0{,}22}.$$

$$P(B) = P(F1 \cap M) \cdot P(F2 \cap H) + P(F2 \cap M) \cdot P(F1 \cap H) =$$

$$= 0{,}6 \cdot 0{,}55 + 0{,}45 \cdot 0{,}4 = 0{,}33 + 0{,}18 = \underline{0{,}51}.$$

$$P(C) = P(MM) = P(F1 \cap M) \cdot P(F2 \cap M) = 0{,}6 \cdot 0{,}45 = \underline{0{,}27}.$$

b)

Para la resolución de este apartado debemos tener en cuenta que, el hecho de pertenecer a una fábrica es independiente de pertenecer a la otra, el suceso $\{HM\}$ es el mismo que $\{MH\}$, por lo cual, el espacio muestral es:

$$\{HH, HM, MM\}\ o\ bien\ \{HH, MH, MM\}.$$

Sabemos que: $P(HH) + P(MH) + P(MM) = 1$

De lo anterior se deduce que el suceso contrario a $P(MM)$ es:

$$P(\overline{MM}) = 1 - [P(HH) + P(MH)] = 1 - (A + C).$$

$$\underline{De\ lo\ anterior\ se\ deduce\ que\ el\ suceso\ contrario\ de\ C\ es\ (A \cup B).}$$

$$P(\overline{MM}) = 1 - (0{,}22 + 0{,}51) = 1 - 0{,}73 = \underline{0{,}27}.$$

****