PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

JUNIO - 2000

(RESUELTOS) por Antonio Menguiano.

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada dos de las cuatro opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene al dividir el total de puntos entre cuatro.

OPCIÓN A

1º) Una matriz cuadrada A es ortogonal si se verifica que $A \cdot A^T = I$. ¿Para qué valores de a y b es la siguiente matriz ortogonal?

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & sen\ b \\ 0 & -sen\ b & \cos b \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & -sen\ b \\ 0 & sen\ b & \cos b \end{pmatrix} \ ;; \ A \cdot A^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & sen\ b \\ 0 & -sen\ b & \cos b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & -sen\ b \\ 0 & sen\ b & \cos b \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 b + sen^2 b & -sen b \cdot \cos b + sen b \cdot \cos b \\ 0 & -sen b \cdot \cos b + sen b \cdot \cos b & \cos^2 b + sen^2 b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{A \ \ es \ \ ortogonal \ \ \forall b \in r \ \ y \ \ para \ \ a = 1 \ \ y \ \ a = -1.}}$$

****

2º) Se considera la función $f(x) = arc\ tag\ x$. Demostrar que existe el menos un número $x \in (0, 1)$, tal que f(x) = x.

Para resolver este ejercicio tenemos que aplicar el Teorema del valor medio o de Lagrange, que dice:

Si f es una función continua en [a, b] y derivable en (a, b), entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ que cumple: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Teniendo en cuenta que, según el enunciado del problema: $arc\ tag\ x = x$, podemos considerar la función $g(x) = x - arc\ tag\ x$, que cumple las condiciones del Teorema de Lagrange en el intervalo (1, 0), por lo tanto será:

$$g'(c) = \frac{g(1) - f(0)}{1 - 0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g(x) = x - arc\ tag\ x \\ g'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{1}{1 + c^2} = \frac{(1 - arc\ tag\ 1) - (0 - arc\ tag\ 0)}{1 - 0}$$

$$\frac{1 + c^2 - 1}{1 + c^2} = \frac{\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - 0}{1} \ ;; \ \frac{c^2}{1 + c^2} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4 - \pi}{4} \ ;; \ 4c^2 = 4 - \pi + 4c^2 - \pi c^2 \ ;; \ \pi c^2 = 4 - \pi \ ;;$$

$$c^2 = \frac{4 - \pi}{\pi} < 1 \Rightarrow |c| < 1 \Rightarrow \underline{\underline{Existe\ al\ menos\ un\ valor\ c \in (0, 1)\ que\ cumple\ la\ condición}}$$

****

3º) Sabemos que las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+m}{3} = \frac{z}{-2}$ y $s \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+m}{-2}$ se cortan en un punto. Calcular el valor de m y el punto de corte.

Las expresiones por unas ecuaciones paramétricas de r y s son las siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -m + 3k \\ z = -2k \end{cases} \;;;\; s \equiv \begin{cases} x = 3k \\ y = 1 + 2k \\ z = -m - 2k \end{cases}$$

Si tienen un punto en común tiene que cumplirse que el valor de x tiene que ser igual para ambas rectas, lo cual nos permita calcular el valor de k, que a su vez nos permite calcular m:

$$1 + 2k = 3k \;\Rightarrow\; \underline{k = 1} \;\Rightarrow\; -m + 3 \cdot 1 = 1 + 2 \cdot 1 \;;;\; -m + 3 = 1 + 2 \;;;\; \underline{\underline{m = 0}}$$

Las rectas r y s son : $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 3k \\ z = -2k \end{cases} \;;;\; s \equiv \begin{cases} x = 3k \\ y = 1 + 2k \\ z = -2k \end{cases}$.

Un punto y un vector de cada una de las rectas son: $\begin{cases} r \Rightarrow \begin{cases} \underline{P(1,\ 0,\ 0)} \\ \underline{\vec{u} = (2,\ 3,\ -2)} \end{cases} \\ s \Rightarrow \begin{cases} \underline{Q(0,\ 1,\ 0)} \\ \underline{\vec{v} = (3,\ 2,\ -2)} \end{cases} \end{cases}$

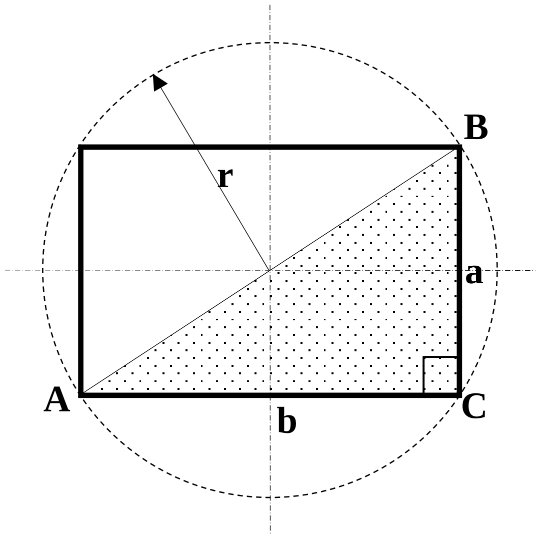
El plano π pedido tiene como vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y contiene, por ejemplo, al punto P(1, 0, 0):

$$\pi(P;\ \vec{u},\ \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \;;;\; -6(x-1) - 6y + 4z - 9z + 4(x-1) + 4y = 0 \;;;$$

$$-2(x-1) - 2y - 5z = 0 \;;;\; 2x - 2 + 2y + 5z = 0 \;;;\; \underline{\underline{\pi \equiv 2x + 2y + 5z - 2 = 0}}$$

****

4º) Demostrar que el rectángulo de área máximo inscrito en una circunferencia de radio r es un cuadrado. Indicar el valor del área máxima.



El área del rectángulo es: $S = \frac{a \cdot b}{2}$.

Del triángulo rectángulo ABC se deduce que:

$(2r)^2 = a^2 + b^2$;; $4r^2 = a^2 + b^2$;; $\underline{b = \sqrt{4r^2 - a^2}}$

Sustituyendo el valor de b en el área:

$$S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{1}{2} a \sqrt{4r^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2a^2 - a^4}$$

Para que el área sea máxima, su derivada tiene que ser cero:

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \frac{8r^2a - 4a^3}{2\sqrt{4r^2a^2 - a^4}} = \frac{2r^2a - a^3}{\sqrt{4r^2a^2 - a^4}} = 0 \Rightarrow 2r^2a - a^3 = 0 \ ;; \ a\left(2r^2 - a^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ \underline{a_2 = r\sqrt{2}} \end{cases}$$

La primera de las soluciones carece de sentido lógico. (sería para mínimo).

Los valores de a y b son: $\underline{\underline{a = r\sqrt{2}}}$.

$$b = \sqrt{4r^2 - a^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2r^2} = \underline{\underline{r\sqrt{2} = b = a}}.$$

<u>Se trata de un cuadrado, como queríamos demostrar.</u>

El valor del área máxima es:

$$S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{\left(r\sqrt{2}\right) \cdot \left(r\sqrt{2}\right)}{2} = \frac{2r^2}{2} = r^2$$

<u>El valor del área máxima es r^2.</u>

****

OPCIÓN B

1º) Resolver el siguiente sistema cuando sea compatible indeterminado: $\left.\begin{array}{r} 2x+ay+z=2 \\ x+ay=1 \\ -y+az=0 \end{array}\right\}$

$$M=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix} \;;\; M'=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 & 2 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix}=2a^2-1-a^2=a^2-1=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{a_1=1} \\ \underline{a_2=-1} \end{cases}$$

$$Para \begin{Bmatrix} a\neq 1 \\ a\neq -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\, M=Rango\ M'=3=n^o\ incógnitas \Rightarrow \underline{Compatible\ \det er\min ado}$$

Observando la matriz ampliada M', tiene las columnas 1ª y 4ª iguales, por lo tanto, para determinar su rango basta con estudiar, por ejemplo, las últimas tres columnas:

$Para\ \ a=1\ \ el\ \ rango\ \ de\ \ M'\ \ es:$

$$M' \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2-1-1=0 \Rightarrow Rango\ M'=2$$

$Para\ \ a=-1\ \ el\ \ rango\ \ de\ \ M'\ \ es:$

$$M' \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=2-1-1=0 \Rightarrow Rango\ M'=2$$

$$Para \begin{Bmatrix} a=1 \\ a=-1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\, M=Rango\ M'=2<n^o\ incógnitas \Rightarrow \underline{Compatible\ \ in\det er\min ado}$$

Vamos a resolver ahora los casos en que es compatible:

1º.- <u>a = 1</u>. El sistema resultante es: $\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=2 \\ x+y=1 \\ -y+z=0 \end{array}\right\}$

Despreciando la 1ª ecuación y parametrizando z, queda:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ -y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=k} \Rightarrow \underline{y=k} \;;;\; x=1-y=\underline{1-k=x} \Rightarrow \underline{\underline{Solución:\begin{cases} x=1-k \\ y=k \\ z=k \end{cases}}}$$

2º.- $\underline{\underline{a = -1}}$. El sistema resultante es: $\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=2 \\ x-y=1 \\ -y-z=0 \end{array}\right\}$

Despreciando la 1ª ecuación y parametrizando z, queda:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=1 \\ -y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=k} \Rightarrow \underline{y=-k} \;;;\; x=1+y=\underline{1-k=x} \Rightarrow \underline{\underline{Solución:\begin{cases} x=1-k \\ y=-k \\ z=k \end{cases}}}$$

****

2º) Calcular el área de la región limitada por la curva $y = \frac{x^2}{x^3 - 2}$ y las rectas y = 0, x = 2, x = 3.

En el intervalo [2, 3] la función f(x) es continua y todas sus ordenadas son positivas, por lo tanto:

$$A = \int_2^3 f(x) \cdot dx = \int_2^3 \frac{x^2}{x^3 - 2} \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x^3 - 2 = t \\ 3x^2 \cdot dx = dt \\ x^2 \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot dt \end{array} \middle\| \begin{array}{c} x = 3 \rightarrow t = 25 \\ \\ x = 2 \rightarrow t = 6 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow$$

$$A = \int_6^{25} \frac{1}{3} \cdot \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \cdot \int_6^{25} \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \cdot [L\, t]_6^{25} = \frac{1}{3} \cdot [L\, 25 - L\, 6] = \underline{\underline{\frac{1}{3} \cdot L \frac{25}{6} \cong 0'475\ u^2 = A}}$$

****

3º) Enunciar el Teorema de Rolle. ¿Podemos aplicar este teorema a la función $f(x)=e^{x^2-2}$ si el intervalo (-1, 1)? ¿Para qué valor α es f'(α) = 0?

El teorema de Rolle se puede enunciar diciendo:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b) y si se cumple que f(a) = f(b), existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que f'(x) = 0.

La función $f(x)=e^{x^2-2}$ es continua y derivable en todo su dominio, que es R, por lo tanto, es aplicable el Teorema de Rolle en el intervalo (-1, 1).

Aplicando el Teorema:

$$f(x)=e^{x^2-2} \Rightarrow \left.\begin{cases} f(1)=e^{1^2-2}=e^{-1}=\frac{1}{e} \\ f(-1)=e^{(-1)^2-2}=e^{-1}=\frac{1}{e} \end{cases}\right\} \Rightarrow f(1)=f(-1)$$

$$f'(x)=(2x)\cdot e^{x^2-2}=0 \Rightarrow 2x=0 \;;;\; \underline{\underline{x=0}}$$

$$\underline{\underline{f'(0)=0}}$$

****

4º) Sabemos que la recta $r \equiv (x,\ y,\ z) = (1,\ -b,\ 0) + \lambda(2,\ -10,\ 1)$ y el plano de ecuación $\pi \equiv 2x + ay + z = 2$ se cortan perpendicularmente y que la recta pasa por P(-1, 1, -1). Calcular a, b y el punto Q de corte.

Si la recta r y el plano π son perpendiculares, un vector normal del plano puede ser vector director de la recta, por lo cual:

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv (x,\ y,\ z) = (1,\ -b,\ 0) + \lambda(2,\ -10,\ 1) \Rightarrow \underline{\vec{v} = (2,\ -10,\ 1)} \\ \\ \pi \equiv 2x + ay + z - 2 = 0 \Rightarrow \underline{\vec{n} = (2,\ a,\ 1)} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v} = \vec{n} \ \Rightarrow\ \underline{\underline{a = -10}}$$

Si r pasa por el punto P(-1, 1, -1), el punto tiene que satisfacer la ecuación de r:

$$(-1,\ 1,\ -1) = (1,\ -b,\ 0) + \lambda(2,\ -10,\ 1) \Rightarrow \begin{cases} -1 = 1 + 2\lambda \\ 1 = -b - 10\lambda \\ -1 = 1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow\ \underline{\lambda = 0}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{b = -1}}$$

El punto Q de corte de $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - 10\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ con $\pi \equiv 2x - 10y + z - 2 = 0$ es el siguiente:

$$2 \cdot (1 + 2\lambda) - 10 \cdot (1 - 10\lambda) + \lambda - 2 = 0\ ;;\ 2 + 4\lambda - 10 + 100\lambda + \lambda - 2 = 0\ ;;\ 105\lambda = 10\ ;;\ \underline{\lambda = \frac{2}{21}}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda = 1 + \frac{4}{21} = \underline{\frac{25}{21} = x} \\ y = 1 - 10\lambda = 1 - \frac{20}{21} = \underline{\frac{1}{21} = y} \\ z = \lambda = \frac{2}{21} \end{cases} \Rightarrow \quad \underline{\underline{Q\left(\frac{25}{21},\ \frac{1}{21},\ \frac{2}{21}\right)}}$$

****