PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

JUNIO 2001

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contestar de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre cuatro.

OPCIÓN A

1º) Se considera el conjunto M de matrices de números reales de la forma $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a^2 + b^2 = 1$.

a) Demostrar que tiene inversa y calcularla.

b) Demostrar que si se multiplican dos matrices de M se obtiene otra matriz de M.

----

a)

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{M \;\; es \;\; inversible, \quad c.q.d.}}$$

$$M^T = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;;;\; Adj.\; de\; M^T = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;;;\; M^{-1} = \frac{Adj.\; de\; M^T}{|M|} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = M^{-1}}}$$

b)

Sean las matrices pertenecientes a M, $A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & y \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$.

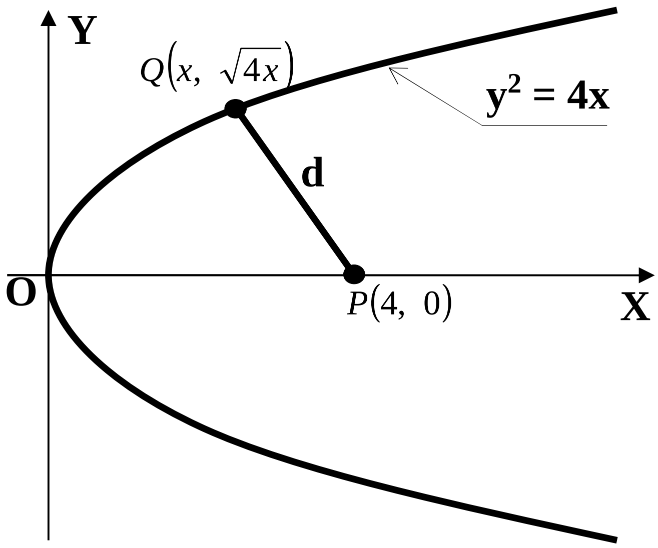
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xp - yq & -xq - yp \\ yp + xq & -yq + xp \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} xp - yq & -(yp + xq) \\ yp + xq & xp - yq \end{bmatrix} \in M$$

$$\overleftarrow{A \cdot B \in M, \;\; c.q.d.}$$

****

2º) Determinar los puntos de la curva $y^2 = 4x$ que están a distancia mínima del punto $P(4,\ 0)$.

La representación gráfica de la curva se expresa en el gráfico.



$$d = \overline{PQ} = \sqrt{(x-4)^2 + \left(\sqrt{4x}-0\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 4x} = \underline{\sqrt{x^2 - 4x + 16}}$$

$$d' = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+16}} = \underline{\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+16}}}$$

$$d' = 0 \Rightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+16}} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x - 2 = 0 \ ;; \ \ \underline{x = 2}$$

$$y^2 = 4x \to x = 2 \Rightarrow y^2 = 4 \cdot 2 = 8 \ ;; \ \ y = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2\sqrt{2} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{Q_1\left(2,\ 2\sqrt{2}\right)}} \\ \\ y_2 = -2\sqrt{2} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{Q_2\left(2,\ -2\sqrt{2}\right)}} \end{cases}$$

Justificación de que la distancia es mínima:

$$d'' = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2-4x+16} - (x-2) \cdot \dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+16}}}{x^2-4x+16} = \frac{\sqrt{x^2-4x+16} - \dfrac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2-4x+16}}}{x^2-4x+16} =$$

$$= \frac{x^2-4x+16-\left(x^2-4x+4\right)}{\left(x^2-4x+16\right)\cdot\sqrt{x^2-4x+16}} = \frac{x^2-4x+16-x^2+4x-4}{\left(x^2-4x+16\right)\cdot\sqrt{x^2-4x+16}} =$$

$$= \underline{\frac{12}{\left(x^2-4x+16\right)\cdot\sqrt{x^2-4x+16}} = d''}$$

$$d''(2) = \frac{12}{\left(2^2 - 4\cdot 2 + 16\right)\cdot\sqrt{2^2 - 4\cdot 2 + 16}} = \frac{12}{12\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{12}}{12} = \underline{\underline{d''(2) > 0 \Rightarrow Mínimo,\ \ c.q.d.}}$$

****

3º) Comprobar que las rectas $\begin{cases} r \equiv (x,\ y,\ z) = (3,\ -4,\ 0) + a(2,\ -3,\ -2) \\ s \equiv (x,\ y,\ z) = (-7,\ 1,\ 2) + b(4,\ -1,\ 0) \end{cases}$ se cortan en un punto. Hallar la ecuación general del plano π que determinan.

Un punto y un vector director de r pueden ser $A(3,\ -4,\ 0)$ y $\overrightarrow{u} = (2,\ -3,\ -2)$.

Un punto y un vector director de s pueden ser $B(-7,\ 1,\ 2)$ y $\overrightarrow{v} = (4,\ -1,\ 0)$.

Sea el vector $\overrightarrow{w}$, cuyo origen es $A \in r$ y cuyo extremo es $B \in s$:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-7,\ 1,\ 2) - (3,\ -4,\ 0) = (-10,\ 5,\ 2)$$

Si los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son coplanarios indicará que las rectas están en un mismo plano; en caso contrario, se cruzan.

Tres vectores son coplanarios si el rango del determinante que forman es nulo:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ -10 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 40 + 20 + 24 = 44 - 44 = 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\ \ \overrightarrow{w}\} = 2}$$

<u>Las rectas r y s están en un mismo plano.</u>

El plano π que contiene a las rectas r y s puede determinarse como sigue:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z \\ 2 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -2z - 8(y+4) + 12z - 2(x-3) = 0 \ ;;$$

$$10z - 8y - 32 - 2x + 6 = 0 \ ;;\ -2x - 8y + 10z - 26 = 0 \ ;;\ \underline{\underline{\pi \equiv x + 4y - 5z + 13 = 0}}$$

****

4º) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{sen\ x} & si\ \ x\neq 0 \\ 0 & si\ \ x=0 \end{cases}$ definida en el siguiente intervalo: $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$. Demostrar que es continua en el intervalo.

En el intervalo dado, el único punto dudoso es para x = 0, ya que en el resto de puntos, la función es continua, por ello, estudiaremos la continuidad en el punto indicado.

La función se puede expresar de la forma: $f(x)=\begin{cases} \frac{sen\ x-x}{x\cdot sen\ x} & si\ \ x\neq 0 \\ 0 & si\ \ x=0 \end{cases}$.

Considerada la función $g(x)=\frac{sen\ x-x}{x\cdot sen\ x}$, su límite cuando $x\rightarrow 0$ es el siguiente:

$$\lim_{x\rightarrow 0}\frac{sen\ x-x}{x\cdot sen\ x}=\frac{0-0}{0\cdot 0}=\frac{0}{0}\ \Rightarrow\ (Aplicando\ \ la\ \ \text{Re}\,gla\ \ de\ \ L'Hopital)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\rightarrow 0}\frac{\cos\ x-1}{1\cdot sen\ x+x\cdot\cos\ x}=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{\cos\ x-1}{sen\ x+x\cos\ x}=\frac{1-1}{0+0\cdot 1}=\frac{0}{0}\Rightarrow(L'Hopital)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\rightarrow 0}\frac{-sen\ x}{\cos x+1\cdot\cos x-x\cdot sen\ x}=\frac{-0}{1+1-0}=\frac{0}{2}=\underline{0}$$

Vamos ahora a estudiar la continuidad:

Para que sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\underline{\lim_{x\rightarrow 0^-}f(x)=\lim_{x\rightarrow 0^+}=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{sen\ x-x}{x\cdot sen\ x}=f(0)=0}$$

<u>La función es continua para x = 0.</u>

****

OPCIÓN B

1º) Hallar el valor de k de manera que el sistema $\left.\begin{array}{l} 2x+3y-4z=0 \\ x-ky+3z=0 \\ 3x-ky+2z=0 \end{array}\right\}$ sea compatible indeterminado.

Por tratarse de un sistema homogéneo, para que sea compatible indeterminado es condición necesaria que el rango de la matriz de coeficientes sea menor que el número de incógnitas, o sea, menor que 3, con lo cual su determinante ha de ser cero.

La matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -k & 3 \\ 3 & -k & 2 \end{pmatrix}$. Tiene que ser $|M|=0$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -k & 3 \\ 3 & -k & 2 \end{vmatrix}=0 \;;;\; -4k+4k+27-12k+6k-6=0 \;;;\; 21=6k \;;;\; 7=2k \;;;\; \underline{\underline{k=\frac{7}{2}}}$$

****

2º) Demostrar que el polinomio $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = 1$ tiene una única raíz positiva.

Considerando la función $f(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$. Por tratarse de una función polinómica en continua y derivable en todo su dominio, que es R.

Teniendo en cuenta que $f(0) = -1 \;\; y \;\; f(1) = 6$, según el Teorema de Bolzano, en el intervalo (0, 1) la función f(x) tiene, al menos, una raíz x = a, siendo 0 < a <1 y tal que f(a) = 0.

Vamos a demostrar ahora, como se nos pide, que la raíz es única.

Si la función tuviera al menos otra raíz real positiva x = b, indicaría que f(b) = 0, con lo cual se podría aplicar a la función f(x) el Teorema de Rolle, teniendo en cuenta lo expresado en el primer párrafo.

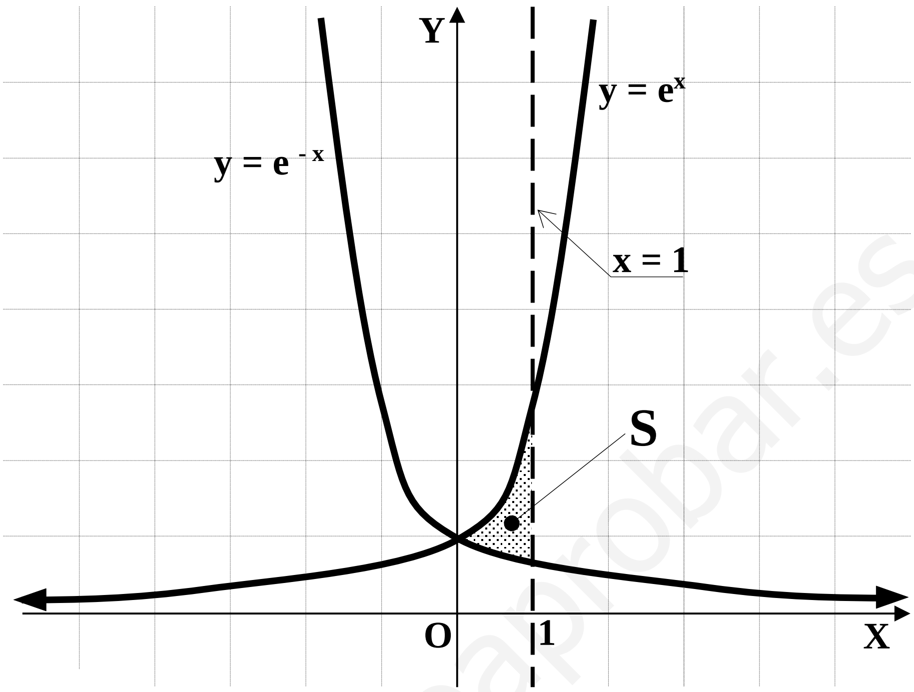
Siendo b > a, tendría que existir un valor positivo c, tal que a < c < b, para el cual se anularía la derivada de la función, es decir: $f'(c) = 0$, y esto, como vamos a demostrar a continuación es imposible:

$f'(x) = 7x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ y siendo c > 0 es: $\underline{f'(c) \neq 0, \;\; \forall c \in R \;\; \{c > 0\}}$, lo cual contradice el Teorema de Rolle y, en consecuencia, demuestra que el polinomio dado tiene una sola raíz positiva, como queríamos demostrar.

****

3º) Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta x = 1.

La representación gráfica de la situación se expresa en la gráfica.



$$S = \int_0^1 \left(e^x - e^{-x}\right) \cdot dx = \int_0^1 e^x \cdot dx - \int_0^1 e^{-x} \cdot dx = \int_0^1 e^x \cdot dx + \int_1^0 e^{-x} \cdot dx = A + B \qquad (*)$$

$$A = \int_0^1 e^x \cdot dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = \underline{e - 1 = A}$$

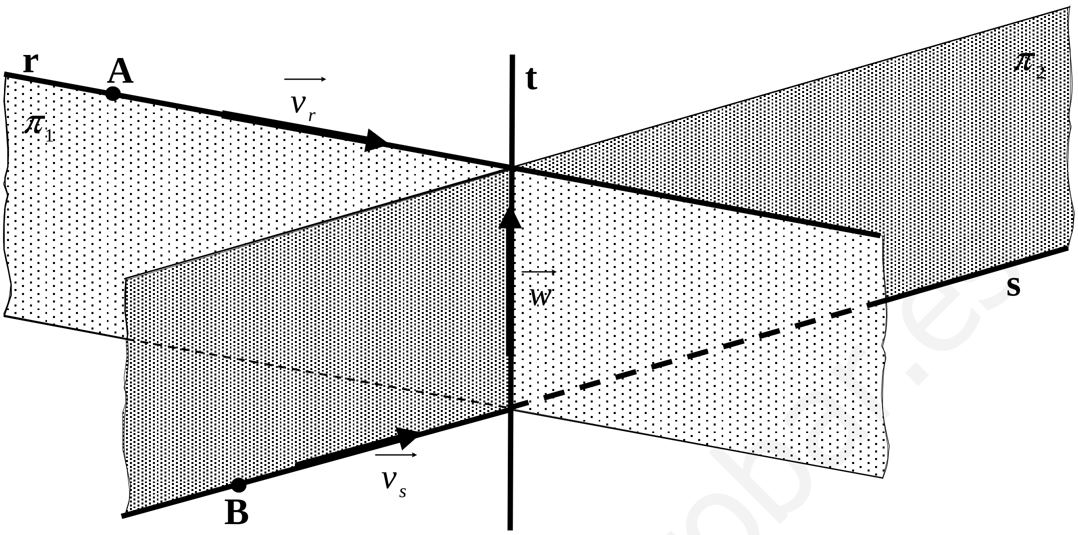
$$B = \int_1^0 e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} -x = t \\ dx = -dt \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = 1 \rightarrow t = -1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow B = -\int_{-1}^0 e^t \cdot dt = \int_0^{-1} e^t \cdot dt = \left[e^t\right]_0^{-1} =$$

$$= e^{-1} - e^0 = \frac{1}{e} - 1 = \underline{\frac{1-e}{e} = B}$$

Sustituyendo en (*): $S = e - 1 + \frac{1-e}{e} = \frac{e^2 - e + 1 - e}{e} = \underline{\underline{\frac{(e-1)^2}{e}\ u^2 = S}}$

****

4º) Hallar la ecuación vectorial de la recta t que es perpendicular simultáneamente a las rectas $r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$ y $s \equiv x+1 = y = \frac{z}{2}$.



La situación del problema se refleja en el gráfico anterior.

El procedimiento para hallar la ecuación de la recta t es el siguiente:

1.- Determinamos los puntos $A \in r$ y $B \in s$: A(0, 1, -1) y B(-1, 0, 0).

2.- Hallamos unos vectores directores de las rectas: $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 2,\ 2)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1,\ 1,\ 2)$.

3.- Obtenemos un vector $\overrightarrow{w}$, perpendicular a $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4i + 2j + k - 2k - 2i - 2j = 2i - k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{w} = (2,\ 0,\ -1)}$$

4.- Determinamos los planos π_1 y π_2, de la forma siguiente:

$$\pi_1\left(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 2x + 4(y-1) - 4(z+1) + (y-1) = 0 \ ;;$$

$$-2x + 5y - 5 - 4z - 4 = 0 \ ;;\ -2x + 5y - 4z - 0 \ ;;\ \underline{\pi_1 \equiv 2x - 5y + 4z + 9 = 0}$$

$$\pi_2(B;\ \vec{v}_s,\ \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -(x+1)+4y-2z+y=0\ ;;$$

$$-x-1+5y-2z=0\ ;;\ \underline{\pi_2 \equiv x-5y+2z+1=0}$$

La recta pedida, t, es la que determinan los planos π_1 y π_2 en su intersección:

$$t \equiv \begin{cases} 2x-5y+4z+9=0 \\ x-5y+2z+1=0 \end{cases}$$

****