

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE BALEARES****JUNIO - 2002**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

El alumno deberá contestar de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas que a continuación se proponen.

Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2'5 puntos como máximo.

OPCIÓN A

1º) Se considera la función $f(x) = -x L x$. Se pide:

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

b) Demostrar que $f(x)$ presenta un máximo relativo para $x = \frac{1}{e}$.

c) Hacer una gráfica de esta función.

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (-x L x) = -0 \cdot (-\infty) \Rightarrow \text{Indeterminado} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-L x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{0} = \\ &= \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow L'Hopital \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x L x) = -\infty \cdot (-\infty) = \infty^2 = \infty$$

b)

$$f'(x) = -1 \cdot L x - x \cdot \frac{1}{x} = -L x - 1 \;; \; f'(x) = 0 \Rightarrow -L x - 1 = 0 \;; \; L x = -1 \;; \; x = \frac{1}{e}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{\frac{1}{e}} = -e < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo relativo para } x = \frac{1}{e}, \text{ c.q.d.}}}$$

c)

Para hacer una gráfica de $f(x)$, además de los datos facilitados por los apartados anteriores conviene tener en cuenta lo siguiente.

La función está definida solamente para valores de x mayores que cero. (Los números negativos no tienen logaritmo y el logaritmo de cero es menos infinito, que no es real).

Se anula para $x = 1$, por lo tanto pasa por el punto $A(1, 0)$.

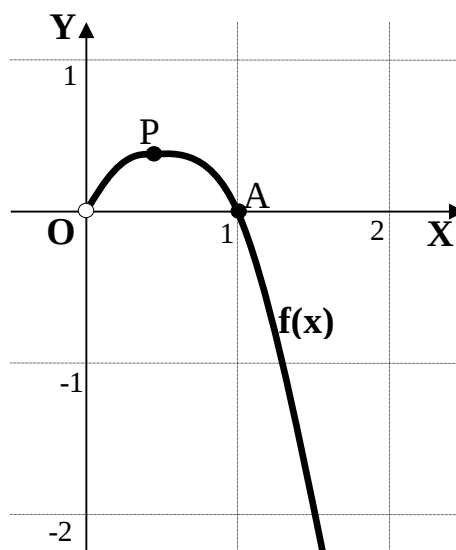
El máximo relativo es el siguiente punto:

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \cdot L\frac{1}{e} = -\frac{1}{e} \cdot (L1 - Le) = -\frac{1}{e} \cdot (0 - 1) = \frac{1}{e} \Rightarrow \underline{P\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)}$$

$f''(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ y también $f''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, lo cual significa que la función no tiene puntos de inflexión; que es creciente en el intervalo $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ y decreciente en $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ y que es cóncava ($\cap$) en su dominio.

De los límites de los apartados anteriores se deduce que no tiene asíntotas.

Con los razonamientos y datos anteriores podemos esbozar con bastante exactitud la gráfica de la función, que es la que sigue.



2º) Se considera el conjunto M de las matrices 3x3 tales que en cada fila y en cada columna tienen dos ceros y un 1. Se pide:

a) Escribir todas las matrices del conjunto M.

b) Ver que todas estas matrices tienen inversa.

a)

Por seguir un orden he partido de la matriz I y he mantenido el primer uno en el elemento a_{11} y he completado los dos casos posibles; después he repetido en proceso con los elementos a_{12} y a_{13} .

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ;; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ;; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ;; \quad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ;; \quad M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$|M_1| = 1 \quad ;; \quad |M_2| = -1 \quad ;; \quad |M_3| = -1 \quad ;; \quad |M_4| = 1 \quad ;; \quad |M_5| = 1 \quad ;; \quad |M_6| = -1$$

En efecto, todas las matrices tienen su determinante distinto de cero, por lo tanto, todas son inversibles, como teníamos que ver.

3º) Enunciar el Teorema de Bolzano. ¿Puede aplicarse este teorema a la función trigonométrica $f(x) = \text{sen}(2x) + \cos(3x)$ si el intervalo es $[0, \pi]$? Encontrar, si existe, un punto de $[0, \pi]$ en el cual se anule esta función.

El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma:

“Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ ”.

La función $f(x)$ es continua en su dominio, que es $\mathbb{R}$, por tanto lo será en cualquier intervalo finito que se considere.

Se trata de encontrar dos valores reales $a, b \in (0, \pi)$, tales que: $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$:

Por ejemplo:

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \text{sen} \frac{2\pi}{3} + \cos \pi = \text{sen } 120^\circ + \cos 180^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3} - 2}{2} < 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{sen} \frac{\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{4} = \text{sen } 90^\circ + \cos 135^\circ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} > 0$$

Según el teorema de Bolzano, se puede afirmar que la función $f(x)$ tiene al menos un punto de corte con el eje OX en el intervalo $(0, \pi)$.

Vamos a determinar, al menos un punto:

$$f(x) = \text{sen}(2x) + \cos(3x) = 0 \quad ; \quad \text{sen}(2x) + \cos(2x + x) = 0 \quad ;$$

$$2 \text{sen } x \cdot \cos x + \cos(2x) \cdot \cos x - \text{sen}(2x) \cdot \text{sen } x = 0 \quad ;$$

$$2 \text{sen } x \cdot \cos x + \cos(2x) \cdot \cos x - 2 \text{sen } x \cdot \cos x \cdot \text{sen } x = 0 \quad ;$$

$$\cos x \cdot [2 \text{sen } x + \cos(2x) - 2 \text{sen}^2 x] = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \quad ; \quad x = \frac{\pi}{2}$$

Otras soluciones se obtienen de la ecuación: $2 \text{sen } x + \cos(2x) - 2 \text{sen}^2 x = 0$

$$2 \text{sen } x + \cos^2 x - \text{sen}^2 x - 2 \text{sen}^2 x = 0 \quad ; \quad 2 \text{sen } x + 1 - \text{sen}^2 x - 3 \text{sen}^2 x = 0 \quad ;$$

$$4 \text{sen}^2 x - 2 \text{sen } x - 1 = 0 \quad ; \quad \text{sen } x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \Rightarrow \dots$$

4º) Decir para que valor de k el sistema $\begin{cases} kz + kt = 1 \\ kx + z = 0 \\ ky + t = 0 \end{cases}$ es compatible. Resolverlo en el caso de $k = 1$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k & k \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 1 \end{pmatrix} ; ; M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k & k & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se trata de un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas, el sistema será compatible cuando ambas matrices tengan por rango tres o dos, que es el mínimo que pueden tener, ya que existe el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Veamos el rango de M en función de k:

$$\text{Rango } M \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{C_1, C_2, C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & k \\ k & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \end{vmatrix} = k^3 = 0 ; ; \underline{k=0} \\ \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & k \\ k & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = k^3 = 0 ; ; \underline{k=0} \\ \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 = 0 ; ; \underline{k=0} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k=0 \Rightarrow \text{Rango } M = 2 \\ k \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } M = 3 \end{array} \right\}$$

Veamos el rango de M' para $k = 0$, donde las dos primeras columnas tienen todos sus elementos cero, por lo tanto:

$$\text{Rango } M' \Rightarrow \{C_3, C_4, C_5\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M = 3}$$

Para $k = 0 \Rightarrow \text{Rango } M \neq \text{Rango } M' \Rightarrow \text{Incompatible}$

Para $k = 1$ resulta un sistema con mayor número de incógnitas que de ecuaciones, por lo cual es compatible indeterminado.

El sistema resultante es $\begin{cases} z + t = 1 \\ x + z = 0. \\ y + t = 0 \end{cases}$

Considerando una de las incógnitas como parámetro, por ejemplo t, resulta:

$$\begin{cases} z = 1 - t \\ x = -z = -(1 - t) = -1 + t \\ y = -t \end{cases} \Rightarrow \text{Solución : } \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN B

1º) Encontrar todas las matrices reales 2x2 tales que la suma de los elementos de cada fila sea igual a 1 y la suma de los elementos de la primera columna sea igual a cero.

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ -a & 1+a \end{pmatrix}, \forall a \in R$$

www.yoquieroaprobar.es

2º) Hacer un dibujo de la región limitada por la función $y = x^3(x+2)$ y la recta $y = 0$. Calcular el área de esta región.

Se trata de una función polinómica, por lo cual es continua en su dominio, que es $\mathbb{R}$. Para su dibujo vamos a determinar los máximos y mínimos, puntos de inflexión y cortes con los ejes.

Los puntos de corte de la curva con el eje de abscisas son para $x = 0$ y $x = -2$.

$$y = x^3(x+2) = x^4 + 2x^3 \quad ; \quad y' = 4x^3 + 6x^2 = 2x^2(2x+3) = y'$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2x^2(2x+3) = 0 \quad ; \quad \underline{x_1 = 0} \quad ; \quad \underline{x_2 = -\frac{3}{2}}$$

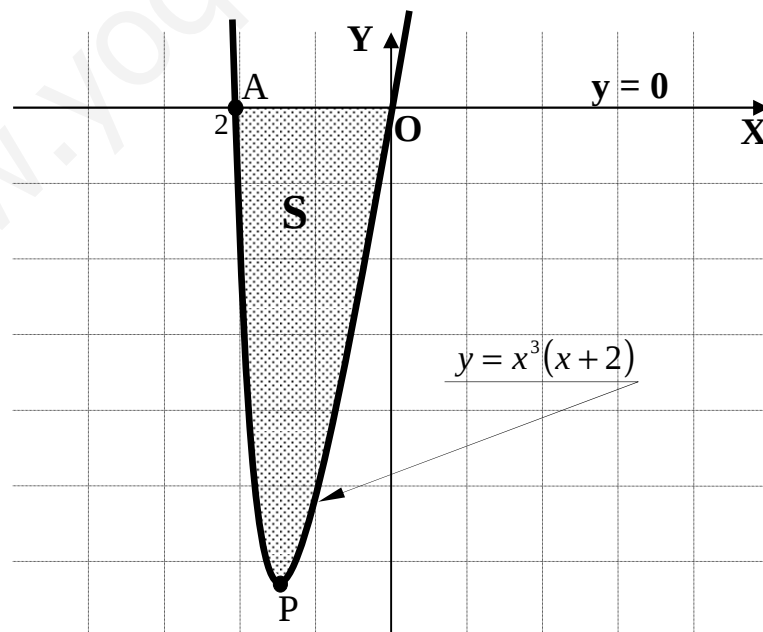
$$y'' = 12x^2 + 12x = 12x(x+1) = y''$$

$$y''(0) = 0 \rightarrow \text{Para punto de inflexión. } y''' = 24x + 12 \quad ; \quad y'''(0) = 12 \neq 0 \Rightarrow \underline{P.I. \Rightarrow O(0, 0)}$$

$$y''(-\frac{3}{2}) = 12 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2} + 1\right) = -8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 4 > 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para } x = -\frac{3}{2}.$$

$$y = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 \left(-\frac{3}{2} + 2\right) = -\frac{27}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{27}{8} \Rightarrow \text{Máx.} \Rightarrow \underline{A\left(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{8}\right)}$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



Para $-2 < x < 0$ resulta que $y < 0$, por lo tanto el valor del área resultará negativa; para evitarlo, cambiamos los límites de integración.

$$S = \int_0^{-2} x^3 (x+2) \cdot dx = \int_0^{-2} (x^4 + 2x^3) \cdot dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^4}{4} \right]_0^{-2} = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} \right]_0^{-2} =$$

$$= \left[\frac{(-2)^5}{5} + \frac{(-2)^4}{2} \right] - 0 = -\frac{32}{5} + \frac{16}{2} = 8 - \frac{32}{5} = \frac{40-32}{5} = \underline{\underline{\frac{8}{5} u^2 = S}}$$

www.yoquieroaprobar.es

3º) Encontrar la ecuación de la recta tangente la función $f(x) = \frac{Lx}{x}$ en el punto de inflexión. Hacer una gráfica de la función en un entorno de este punto, donde aparezca también dibujada la recta tangente encontrada anteriormente.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - Lx \cdot 1}{x^2} = \frac{1-Lx}{x^2} = f'(x)$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1-Lx) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-1-2(1-Lx)}{x^3} = \frac{-1-2+2Lx}{x^3} = \frac{2Lx-3}{x^3} = f''(x)$$

$$f'''(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot x^3 - (2Lx-3) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2-3(2Lx-3)}{x^4} = \frac{2-6Lx+9}{x^4} = \frac{11-6Lx}{x^4} = f'''(x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-Lx}{x^2} = 0 \;; \; 1-Lx = 0 \;; \; Lx = 1 \;; \; x = e$$

$$f''(e) = \frac{2Le-3}{e^3} = \frac{2-3}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para } x = e$$

$$f(e) = \frac{Le}{e} = \frac{1}{e} \Rightarrow \text{Máx.} \Rightarrow A\left(e, \frac{1}{e}\right) \approx A(2'72, 0'34)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2Lx-3}{x^3} = 0 \;; \; 2Lx-3 = 0 \;; \; Lx = \frac{3}{2} \;; \; x = e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e} = x$$

$$f'''(e\sqrt{e}) = \frac{11-6 \cdot \frac{3}{2}}{e^3} = \frac{11-9}{e^3} = \frac{2}{e^3} \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión para } x = e\sqrt{e}$$

$$f(e\sqrt{e}) = \frac{L(e\sqrt{e})}{e\sqrt{e}} = \frac{\frac{3}{2}}{e\sqrt{e}} = \frac{3}{2e\sqrt{e}} = \frac{3\sqrt{e}}{2e^2} \Rightarrow P.I. \Rightarrow B\left(e\sqrt{e}, \frac{3\sqrt{e}}{2e^2}\right) \approx B(4'48, 0'33)$$

La ecuación de la recta tangente tiene como pendiente el valor de la derivada en ese punto:

$$m = f'(e\sqrt{e}) = \frac{1-L(e\sqrt{e})}{(e\sqrt{e})^2} = \frac{1-\frac{3}{2}}{e^3} = \frac{-\frac{1}{2}}{e^3} = \frac{-1}{2e^3} = m$$

La recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$, apli-

cada a este caso sería:

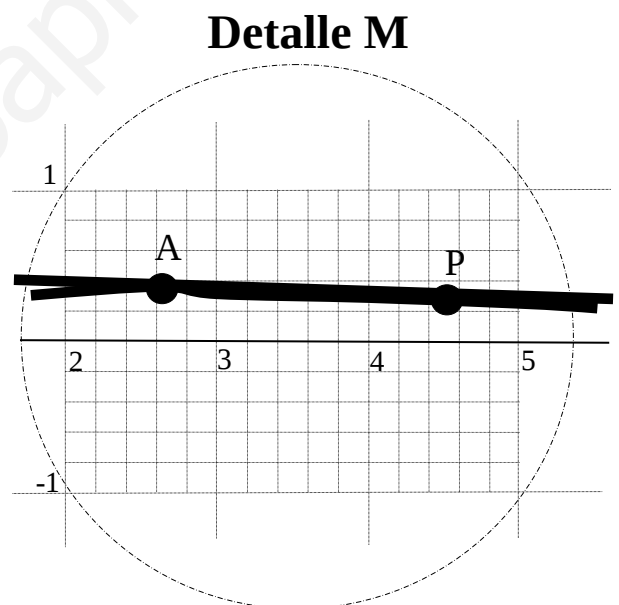
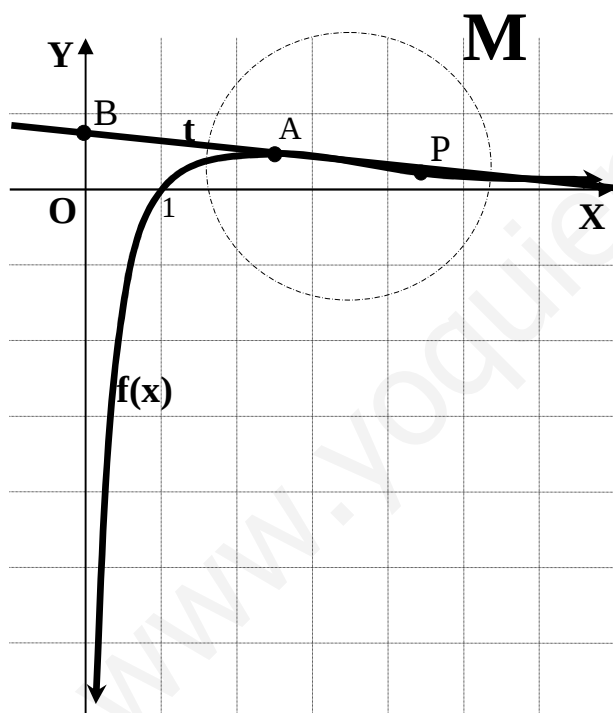
$$y - \frac{3\sqrt{e}}{2e^2} = \frac{-1}{2e^3}(x - e\sqrt{e}) ;; 2e^3y - 3e\sqrt{e} = -x + e\sqrt{e} ;; \underline{\underline{t \equiv x + 2e^3y - 4e\sqrt{e} = 0}}$$

Para facilitar la expresión de la tangente, la expresamos en forma explícita y determinamos dos puntos de la misma:

$$y = \frac{-1}{2e^3}x + \frac{4e\sqrt{e}}{2e^3} = \frac{-1}{2e^3}x + \frac{2\sqrt{e}}{e^2} ;; x = 0 \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{e}}{e^2} \cong 0'74 \Rightarrow \underline{B(0, 0'74)}$$

$$y = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 4e\sqrt{e} - \frac{e^3}{2} \cong 18 - 10 = 8 \Rightarrow \underline{C\left(\frac{1}{4}, 8\right)}$$

Teniendo en cuenta que el dominio de definición de la función es $(0, +\infty)$ y que tiene por asíntotas los ejes de coordenadas, la representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



4º) Encontrar la ecuación general del plano que corta a los ejes de coordenadas en los puntos A(1, 0, 0), B(0, 2, 0) y C(0, 0, 3). Encontrar los puntos de la recta $x = y = z$ que están a distancia $d = \frac{1}{7}$ de este plano.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 0, 3) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 3)$$

El plano π viene determinado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y cualquiera de los tres puntos, por ejemplo, el A(1, 0, 0):

$$\pi(A; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad 6(x-1) + 2z + 3y = 0 \quad ; \quad 6x - 6 + 2z + 3y = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 6x + 3y + 2z - 6 = 0}}$$

Los puntos de la recta r tienen por expresión general P(x, x, x).

La distancia de un punto a una recta es $d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicando esta fórmula al plano π y al punto P, resulta:

$$d(P, \pi) = \frac{1}{7} = \frac{|6x + 3x + 2x - 6|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{|11x - 6|}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{|11x - 6|}{\sqrt{49}} = \frac{|11x - 6|}{7} \Rightarrow |11x - 6| = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} 11x - 6 = 1 \\ 11x - 6 = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 11x = 7 \\ 11x = 5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{7}{11} \\ x_2 = \frac{5}{11} \end{array} \Rightarrow \underline{\underline{A\left(\frac{7}{11}, \frac{7}{11}, \frac{7}{11}\right)}} \\ \underline{\underline{B\left(\frac{5}{11}, \frac{5}{11}, \frac{5}{11}\right)}}$$
