PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

SEPTIEMBRE - 2004

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4.

OPCIÓN A

1º) Determinar el punto de inflexión de abscisa positiva de la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$. Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva en este punto. ¿Cuál es la posición de la curva respecto de la recta tangente?

$$y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \;;;$$

$$y'' = \frac{-2\cdot(1+x^2)^2 - (-2x)\cdot 2\cdot(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2\cdot(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{-2-2x^2+8x^2}{(1+x^2)^3} =$$

$$= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} = y''$$

$$y''=0 \Rightarrow 6x^2-2=0 \;;;\; 3x^2-1=0 \;;;\; x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \;;;\; x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para que exista el punto de inflexión es necesario que no se anule la tercera derivada para ese valor:

$$y''' = \frac{12x\cdot(1+x^2)^3 - (6x^2-2)\cdot 3\cdot(1+x^2)^2\cdot 2x}{(1+x^2)^6} = \frac{12x\cdot(1+x^2) - 6x\cdot(6x^2-2)}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{12x+12x^3-36x^3+12x}{(1+x^2)^4} = \frac{24x-24x^3}{(1+x^2)^4} = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} = y'''$$

www.yoquieroaprobar.es

$$y'''_{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^4} = \frac{8\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^4} \neq 0 \Rightarrow \underline{P.\ I.\ \ para\ \ x = \frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

$$y_{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{\underline{P.I.\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{4}\right)}}$$

La recta que pasa por el punto de inflexión tiene por pendiente el valor de la primera derivada para ese punto:

$$y' = \frac{-2x}{\left(1 + x^2\right)^2} \Rightarrow m = y'_{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{-2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{16} = \underline{-\frac{3\sqrt{3}}{8} = m}$$

$$y - y_0 = m\left(x - x_0\right) \Rightarrow y - \frac{3}{4} = -\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\ ;;\ 8y - 6 = -3\sqrt{3}\left(\frac{3x - \sqrt{3}}{3}\right)\ ;;$$

$$8y - 6 = -\sqrt{3}\left(3x - \sqrt{3}\right)\ ;;\ 8y - 6 = -3\sqrt{3}\,x + 3 = 0\ ;;\ \underline{\underline{t \equiv 3\sqrt{3}\,x + 8y - 9 = 0}}$$

Para interpretar la posición de la tangente con respecto a la curva, estudiamos la concavidad y convexidad de la misma en el entorno del punto de inflexión estudiado:

$$y'' = \frac{6x^2 - 2}{\left(1 + x^2\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{Para\ \ x < \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y'' < 0 \Rightarrow Cóncava\ \ (\cap)} \\ \\ \underline{Para\ \ x > \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y'' > 0 \Rightarrow Convexa\ \ (\cup)} \end{cases}$$

De lo anterior se deduce que:

<u>A la izquierda del punto de inflexión está la curva por encima de la recta y a la derecha, al contrario.</u>

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Decir para que valores de k el siguiente sistema es compatible determinado. ¿Cómo es el sistema para k = 2?

$$\left.\begin{array}{l}(1-k)x+(2k+1)y+(2k+2)z=k\\ kx+ky=2k+2\\ 2x+(k+1)y+(k-1)z=9-2k+k^2\end{array}\right\}$$

Para que el sistema sea compatible determinado, según el Teorema de Rouché-Fröbenius, es necesario que la matriz de coeficientes tenga rango tres, igual que la matriz ampliada y también igual al número de incógnitas; es decir, que el determinante de la matriz de coeficientes tiene que ser distinto de cero:

$$M=\begin{pmatrix}1-k & 2k+1 & 2k+2\\ k & k & 0\\ 2 & k+1 & k-1\end{pmatrix} \;;;\; |M|=\begin{vmatrix}1-k & 2k+1 & 2k+2\\ k & k & 0\\ 2 & k+1 & k-1\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}1-k & 2k+1 & 2k+2\\ k & k & 0\\ 2 & k+1 & k-1\end{vmatrix}=k(1-k)(k-1)+2k(k+1)^2-4k(k+1)-k(k-1)(2k+1)=$$

$$=k(k-1-k^2+k)+2k(k^2+2k+1)-4k^2-4k-k(2k^2+k-2k-1)=$$

$$=-k^3+2k^2-k+2k^3+4k^2+2k-4k^2-4k-2k^3+k^2+k=-k^3+3k^2-2k=$$

$$=-k(k^2-3k+2)=0 \;;;\; \underline{k_1=0}$$

$$k^2-3k+2=0 \;;;\; k=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}\Rightarrow \underline{k_2=2} \;;;\; \underline{k_3=1}$$

$$\underline{\underline{El\ \ sistema\ \ es\ \ Compatibla\ \ Determinado\ \ \forall k\in R,\ tal\ \ que\ \ \{k\neq 0,\ k\neq 2,\ k\neq 1\}}}$$

Para k = 2 el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r}-x+5y+6z=2\\ x+y=3\\ 2x+3y+z=9\end{array}\right\}$.

La matriz ampliada es $M'=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 6 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 3\\ 2 & 3 & 1 & 9\end{pmatrix}$. Veamos cuál es su rango:

www.yoquieroaprobar.es

$$\{C_1,\ C_2,\ C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -9+6+30-4+9-45 = 26-49 = -13 \neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 3.

$$\underline{\underline{Para\ \ k=2\ \Rightarrow\ Rango\ \ M \neq Rango\ \ M'\ \Rightarrow\ Incompatible}}$$

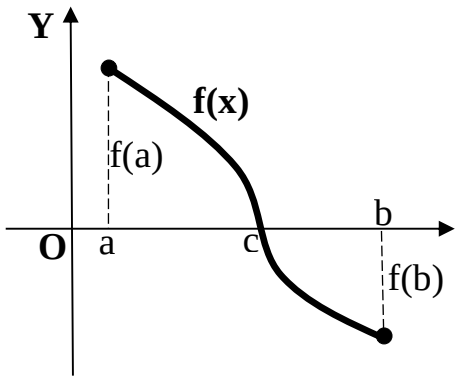
****

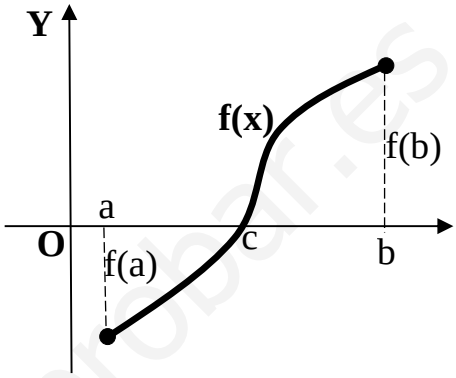
www.yoquieroaprobar.es

3º) Enunciar el Teorema de Bolzano. Dar un ejemplo que demuestre que el Teorema de Bolzano requiere que la función sea continua en el intervalo $[a,\ b]$.

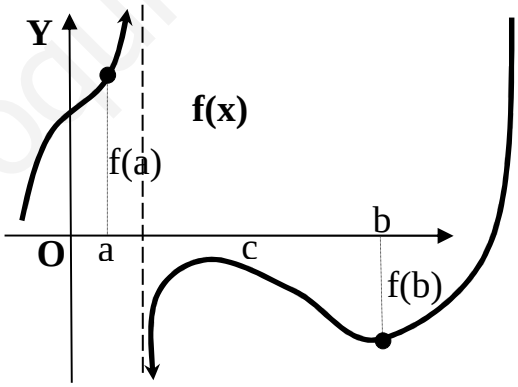
El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma:

"Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$".





Si una función f es no es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, no se puede asegurar que exista al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$; esto es evidente en el grafico siguiente:



Como puede observarse, la función f(x) cumple las condiciones del teorema, excepto la de ser continua, y en este caso no existe ningún valor del intervalo $[a,\ b]$ para el cual se anule la función.

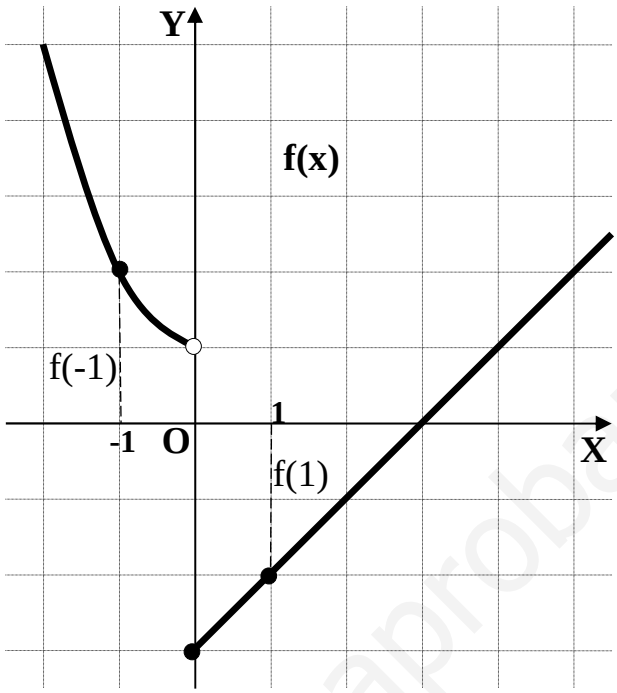
Un ejemplo puede ser la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si \quad x < 0 \\ -x - 3 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

En los extremos del intervalo la función toma valores de distinto signo:

www.yoquieroaprobar.es

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2 > 0 \;\; ;; \;\; f(1) = 1 - 3 = -2 < 0$$

Sin embargo no existe ningún valor $c \in (-1,\ 1)$ para el cual se anule la función, como puede comprobarse en el gráfico siguiente.



****

www.yoquieroaprobar.es

4º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-a}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+z=1 \end{cases}$, calcular el valor de a de tal manera que las rectas se corten. Determinar el punto de corte.

La expresión por unas ecuaciones paramétricas de la recta s la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y-z=-\lambda \\ \underline{z=1-2\lambda} \end{matrix}\right\} \rightarrow y=z-\lambda=\underline{1-3\lambda} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-3\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases}}$$

Un punto y un vector director de cada una de las rectas pueden ser:

$$\text{Recta } r \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \underline{\vec{u}=(-2,\ -1,\ 2)} \\ \\ \underline{A(a,\ -1,\ -1)} \end{matrix}\right\} \ ;;\ \text{Recta } s \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \underline{\vec{v}=(1,\ -3,\ -2)} \\ \\ \underline{B(0,\ 1,\ 1)} \end{matrix}\right\}$$

El vector $\vec{w}$ que tenga como origen el punto de r, A(a, -1, -1) y como extremo el punto de s, B(0, 1, 1) es:

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 1,\ 1) - (a,\ -1,\ -1) = \underline{(-a,\ 2,\ 2) = \vec{w}}$$

Si los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son coplanarios, las rectas están en un mismo plano y (como no son paralelas) se cortan, por tanto es necesario que el determinante que forman los tres vectores sea nulo, es decir:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -a & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 12+4-2a-6a-8+2=0 \ ;;\ -8a+10=0 \ ;;\ \underline{\underline{a=\frac{5}{4}}}$$

El punto de corte se puede obtener sustituyendo en r los valores de x, y, z de s:

$$r \equiv \frac{\lambda - \frac{5}{4}}{-2} = \frac{1-3\lambda+1}{-1} = \frac{1-2\lambda+1}{2} \Rightarrow \frac{2-3\lambda}{-1} = \frac{2-2\lambda}{2} \ ;;\ 2-3\lambda=-1+\lambda \ ;;$$

$$3=4\lambda \ ;;\ \lambda=\frac{3}{4} \Rightarrow \left\{x=\frac{3}{4} \ ;;\ y=1-\frac{9}{4}=-\frac{5}{4} \ ;;\ z=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{P\left(\frac{3}{4},\ -\frac{5}{4},\ -\frac{1}{2}\right)}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN B

1º) Se considera la función $f(x)=x(x-a)(x-b)(x-c)$, con $0<a<b<c$. Demostrar que la ecuación $f(0)=0$ tiene tres raíces reales.

De la observación de la función expresada factorialmente se deduce que:

$$f(0)=f(a)=f(b)=f(c)=0$$

Como f(x) es una función polinómica es continua en su dominio que es R, por lo cual le es aplicable el Teorema de Rolle a cualquier intervalo finito.

Aplicando sucesivamente el Teorema de Rolle:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ \\ f(a)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists m \in (0,\ a) \Rightarrow f'(m)=0 \Rightarrow \underline{\underline{m\ \ es\ \ una\ \ raíz\ \ real\ \ de\ \ f(0)}}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(a)=0 \\ \\ f(b)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists n \in (a,\ b) \Rightarrow f'(n)=0 \Rightarrow \underline{\underline{n\ \ es\ \ una\ \ raíz\ \ real\ \ de\ \ f(0)}}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(b)=0 \\ \\ f(c)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists p \in (b,\ c) \Rightarrow f'(p)=0 \Rightarrow \underline{\underline{p\ \ es\ \ una\ \ raíz\ \ real\ \ de\ \ f(0)}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Calcular los puntos de la recta $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$ que equidistan de los siguientes planos: $\pi \equiv 3x + 4y = 1$ y $\pi' \equiv 4x - 3z = 1$.

La recta r expresada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$.

Un punto genérico de la recta r es $P(-1+2\lambda,\ 1+3\lambda,\ 2\lambda)$.

La distancia de un punto a un plano es: $d(P,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; aplicando la fórmula a los planos π y π':

$$d(P,\ \pi) = \frac{|3(-1+2\lambda) + 4(1+3\lambda) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} \ ;;\ d(P,\ \pi') = \frac{|4(-1+2\lambda) - 3(2\lambda) - 1|}{\sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2}} \ ;;$$

$$d(P,\ \pi) = d(P,\ \pi') \ \Rightarrow \ \frac{|-3 + 6\lambda + 4 + 12\lambda - 1|}{5} = \frac{|-4 + 8\lambda - 6\lambda - 1|}{5} \ ;;$$

$$|18\lambda| = |2\lambda - 5| \ \Rightarrow \begin{cases} 18\lambda = 2\lambda - 5 \ ;;\ 16\lambda = -5 \ ;;\ \underline{\lambda_1 = -\frac{5}{16}} \\ \\ 18\lambda = -2\lambda + 5 \ ;;\ 20\lambda = 5 \ ;;\ \underline{\lambda_2 = \frac{1}{4}} \end{cases}$$

$$\lambda_1 = -\frac{5}{16} \ \Rightarrow \ \begin{cases} x = -1 + 2\lambda = -1 - \frac{5}{8} = -\frac{13}{8} \\ y = 1 + 3\lambda = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16} \\ z = 2\lambda = -\frac{5}{8} \end{cases} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{P_1\left(-\frac{13}{8},\ \frac{1}{16},\ -\frac{5}{8}\right)}}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4} \ \Rightarrow \ \begin{cases} x = -1 + 2\lambda = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ y = 1 + 3\lambda = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \\ z = 2\lambda = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{P_2\left(-\frac{1}{2},\ \frac{7}{4},\ \frac{1}{2}\right)}}$$

****

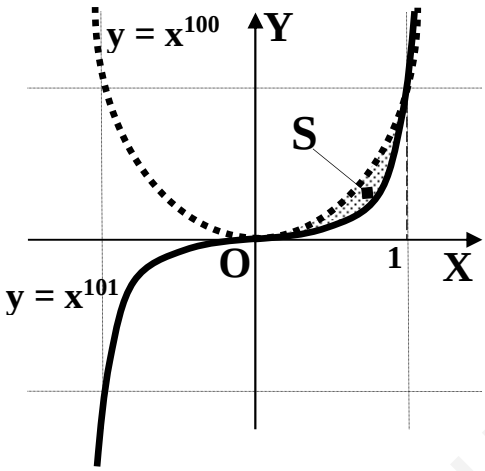
www.yoquieroaprobar.es

3º) Hacer un dibujo del recinto limitado por las curvas $y = x^{100}$ e $y = x^{101}$. Calcular el área de este recinto.

Los puntos de corte de las dos funciones son:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^{100} \\ y = x^{101} \end{array}\right\} \Rightarrow x^{100} = x^{101} \;;;\; x^{100} - x^{101} = 0 \;;;\; x^{100}(1-x) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^{100} = 0 \rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ \\ 1 - x = 0 \rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow \underline{A(1,\ 1)} \end{array}\right.$$

Teniendo en cuenta que la primera función es par y la segunda impar, es decir, que son simétricas con respecto al eje Y la primera y con respecto al origen la segunda, la representación gráfica es, aproximadamente, la indicada en la figura.



Para determinar el área tendremos en cuenta que en el intervalo $(0,\ 1)$ todas las ordenadas de la función $y = x^{100}$ son mayores que las de la función $y = x^{101}$, como a continuación se demuestra, tomando un valor intermedio del intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^{100} \Rightarrow y_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{100} = \dfrac{1}{2^{100}} \\ y = x^{101} \Rightarrow y_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{101} = \dfrac{1}{2^{101}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^{100} > x^{101}, \\ \forall x \in (0,\ 1) \end{array}\right\}$$

$$S = \int_0^1 x^{100} \cdot dx - \int_0^1 x^{101} \cdot dx = \int_0^1 \left(x^{100} - x^{101}\right) \cdot dx = \left[\frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{102}}{102}\right]_0^1 = \left(\frac{1^{100}}{101} - \frac{1^{102}}{102}\right) - 0 =$$

$$= \frac{1}{101} - \frac{1}{102} = \frac{102 - 101}{101 \cdot 102} = \underline{\underline{\frac{1}{10302}\ u^2 = S}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

4º) Determinar todas las matrices A, tales que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$. De estas matrices, determinar las que tienen la suma de todos sus elementos igual a cero.

Sea la matriz pedida $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; sería: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;;

$$\begin{pmatrix} a+b & a \\ c+d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+b = a+c \\ a = b+d \\ c+d = a \\ \underline{c = b} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix} \;;;\; \forall \{a,\ b\} \in R}}$$

Las matrices cuya suma de todos sus elementos es cero son:

$$a + 2b + a - b = 0 \;;;\; 2a + b = 0 \;;;\; \underline{b = -2a} \Rightarrow \underline{\underline{A = \begin{pmatrix} a & -2a \\ -2a & 3a \end{pmatrix}}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es