PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

JUNIO – 2007

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4.

OPCIÓN A

1º) Discute el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+z=k \\ (1+k)x+y+z=2k \\ x+(1+k)y+z=1 \end{cases}$, según los valores del parámetro k y resuélvalo para k = -1.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+k & 1 & 1 \\ 1 & 1+k & 1 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 1+k & 1 & 1 & 2k \\ 1 & 1+k & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de k es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+k & 1 & 1 \\ 1 & 1+k & 1 \end{vmatrix}=1+(1+k)^2+1-1-1-k-1-k=0 \;;;\; k^2+2k+1-2k-1=0 \;;;$$

$k^2=0 \;;;\; \underline{k=0}$

$$\underline{\underline{Para \;\; k \neq 0 \Rightarrow Rango \;\; M = Rango \;\; M' = 3 = n^o \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; Determinado}}$$

$$Para \;\; k=0 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_2\} \Rightarrow \underline{Rang \;\; M'=2}$$

www.yoquieroaprobar.es

$$\underline{\underline{Para\ \ k=0 \Rightarrow Rango\ \ M=1\ ;;\ Rango\ \ M'=2\ \Rightarrow\ Incompatible}}$$

Para k = -1 resulta el sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=0 \\ x+z=1 \end{cases}$.

Resolviendo por la Regla de Cramer:

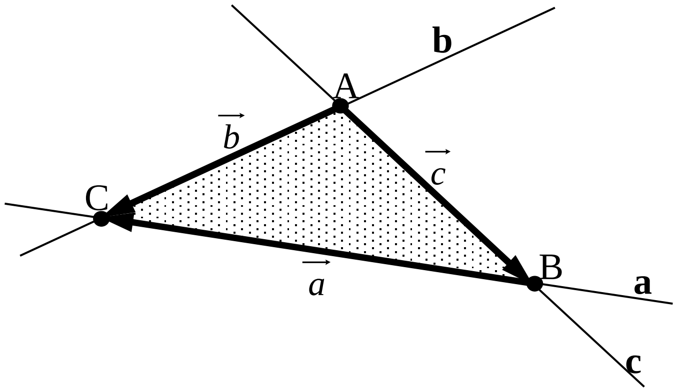
$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{(-1)^2}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{1}=\frac{0}{1}=\underline{\underline{0=x}} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{1}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\underline{\underline{-1=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1}=\underline{\underline{1=z}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Se considera el triángulo de vértices A(0, 0, 1), B(2, 0, 0) y C(1, 1, 1). ¿Cuál es la intersección de los planos que pasan por cada vértice y son perpendiculares a la recta determinada por los otros dos vértices?



Los puntos A(0, 0, 1), B(2, 0, 0) y C(1, 1, 1) determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{BC} = C - B = (1,\ 1,\ 1) - (2,\ 0,\ 0) = (-1,\ 1,\ 1)$$

$$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC} = C - A = (1,\ 1,\ 1) - (0,\ 0,\ 1) = (1,\ 1,\ 0)$$

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ 0,\ 0) - (0,\ 0,\ 1) = (2,\ 0,\ -1)$$

El plano π_1 que pasa por A(0, 0, 1) y es perpendicular a la recta a tiene como vector normal al vector director de la recta a, que es el vector $\overrightarrow{a} = (-1,\ 1,\ 1)$, por lo que su ecuación general es $\pi_1 \equiv -x + y + z + D_1 = 0$. Para hallar el valor de D_1 tenemos en cuenta que al plano contiene al punto A:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv -x + y + z + D_1 = 0 \\ A(0,\ 0,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow -0 + 0 + 1 + D_1 = 0\ ;;\ D_1 = -1 \Rightarrow \underline{\pi_1 \equiv -x + y + z - 1 = 0}$$

El plano π_2 que pasa por B(2, 0, 0) y es perpendicular a la recta b tiene como vector normal al vector director de la recta b, que es el vector $\overrightarrow{b} = (1,\ 1,\ 0)$, por lo que su ecuación general es $\pi_2 \equiv x + y + D_2 = 0$. Para hallar el valor de D_2 tenemos en cuenta que al plano contiene al punto B:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_2 \equiv x + y + D_2 = 0 \\ B(2,\ 0,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 + 0 + D_2 = 0\ ;;\ D_2 = -2 \Rightarrow \underline{\pi_2 \equiv x + y - 2 = 0}$$

El plano π_3 que pasa por C(1, 1, 1) y es perpendicular a la recta c tiene como vector normal al vector director de la recta c, que es el vector $\overrightarrow{c} = (2,\ 0,\ -1)$, por lo que su ecuación general es $\pi_3 \equiv 2x - z + D_3 = 0$. Para hallar el valor de D_3 tenemos en cuenta que al plano contiene al punto C:

$$\left.\begin{array}{l}\pi_3 \equiv 2x - z + D_3 = 0 \\ c(1,\ 1,\ 1)\end{array}\right\} \Rightarrow 2 - 1 + D_3 = 0 \ ;;\ D_3 = -1 \Rightarrow \underline{\pi_3 \equiv 2x - z - 1 = 0}$$

La intersección de los tres planos es la solución del sistema formada por los mismos, que es: $\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x + y = 2 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$. Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ \ y \ \ M' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$, cuyos rangos son:

$$Rang\ \ M \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 1 = 0 \Rightarrow \underline{Rang\ \ M = 2}$$

$$Rang\ \ M' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 - 2 - 1 = 0 \\ \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 - 2 - 1 = 0 \\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Rang\ \ M' = 2}$$

Según el Teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado por tener las dos matrices el mismo rango y éste es menor que el número de incógnitas.

La intersección pedida es una recta

La ecuación de la recta se obtiene eliminando una de las ecuaciones del sistema, por ejemplo: $\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - z = 1 \end{cases}}}$.

****

www.yoquieroaprobar.es

3º) Demuestra que la curva $f(x) = x - 2\cos x$ tiene un punto de inflexión en el intervalo $[0,\ \pi]$ y halla la ecuación de la recta tangente a la curva en ese punto. Haz un dibujo en un entorno del mismo punto.

Para que una función tenga un punto de inflexión es necesario que se anule la segunda derivada en ese punto y que la tercera derivada sea distinta de cero, en el mismo punto:

$$f'(x) = 1 + 2\,sen\ x\ \ ;;\ \ f''(x) = 2\cos\ x\ \ ;;\ \ f'''(x) = -2\,sen\ x$$

$$f''(x) = 0\ \Rightarrow\ 2\cos\ x = 0\ ;;\ \cos\ x = 0\ \Rightarrow\ \underline{x = \frac{\pi}{2} \in [0,\ \pi]}$$

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 2\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\cdot 0 = \frac{\pi}{2}\quad P.\,I.\ \Rightarrow\ \underline{P\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$f'''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -2\ sen\ \frac{\pi}{2} = -2 \neq 0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Existe\ \ un\ \ P.\,I.\ \ en\ \ [0,\ \pi],\ \ c.q.d.}}$$

Para hacer un dibujo de la función en el entorno del punto de inflexión tendremos en cuenta que la función es la suma de dos funciones continuas en sus dominios, que es R para las dos, lo cual significa que f(x) es continua en R.

Los extremos relativos de la función en el entorno de punto de inflexión son los siguientes:

$$f'(x) = 0\ \Rightarrow\ 1 + 2\,sen\ x = 0\ ;;\ sen\ x = -\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \underline{x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}}\ \ (k\cdot 360º – 90º ± 30º)$$

$$\text{Para k = 0} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{-3\pi - \pi}{6} = \dfrac{-4\pi}{6} = -\dfrac{2\pi}{3} \\ \\ x_2 = -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{-3\pi + \pi}{6} = \dfrac{-2\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases}.$$

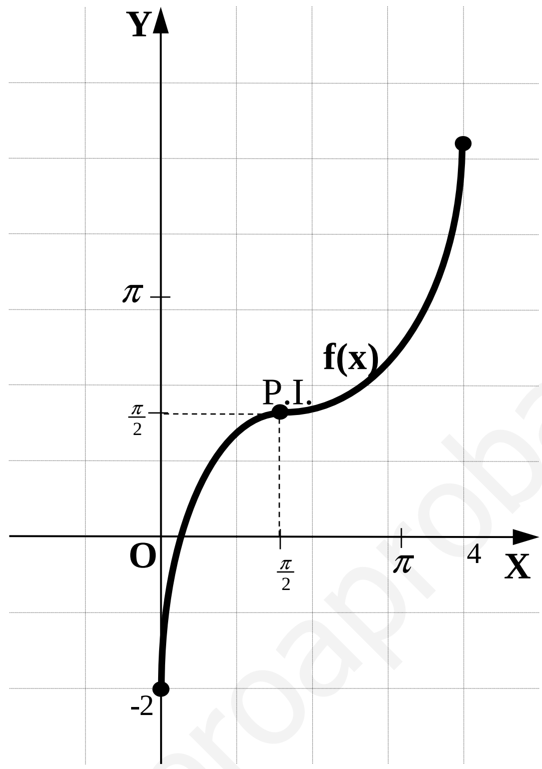
$$\text{Para k = 1} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2\pi - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{12\pi - 3\pi - \pi}{6} = \dfrac{8\pi}{6} = \dfrac{4\pi}{3} \\ \\ x_2 = 2\pi - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{12\pi - 3\pi + \pi}{6} = \dfrac{10\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{3} \end{cases}.$$

Como puede apreciarse, la función no tiene máximos ni mínimos en el intervalo

www.yoquieroaprobar.es

dado $[0,\ \pi]$ y, considerando que $f(0) = 0 - 2\cos 0 = -2$ y $f(\pi) = \pi - 2\cos\ \pi = \pi + 2$, la función es monótona creciente en el intervalo.

La representación gráfica, aproximada, de la función en el intervalo es la que se expresa en el siguiente gráfico.



****

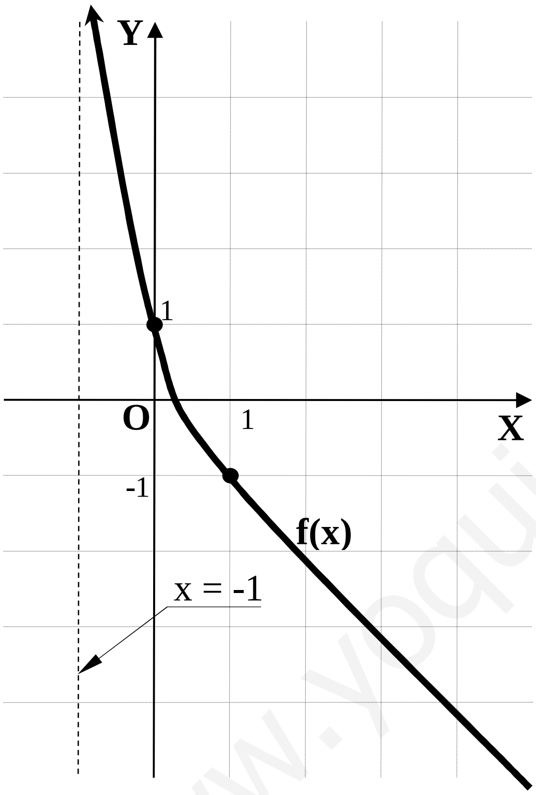
www.yoquieroaprobar.es

4º) De una función y = f(x), x > -1, sabemos que tiene por derivada $y'=\frac{a}{1+x}$, donde a es una constante. Determina la función, si además, sabemos que f(0) = 1 y f(1) = -1. Haz una gráfica aproximada.

$$f(x)=\int y'(x)\cdot dx=\int \frac{a}{1+x}\cdot dx=\underline{a\,L(1+x)+C=f(x)}$$

$$f(0)=1 \Rightarrow a\,L(1+0)+C=1 \;;;\; a\,L1+C=1 \;;;\; a\cdot 0+C=1 \;;;\; \underline{C=1}$$

$$f(1)=-1 \Rightarrow a\,L(1+1)+1=-1 \;;;\; a\,L2=-2 \;;;\; \underline{a=-\frac{2}{L2}}$$



$$\underline{\underline{f(x)=1-\frac{2}{L2}\cdot L(1+x),\ con\ \ x>-1}}$$

Para hacer una representación gráfica aproximada de la situación tenemos en cuenta los datos f(0) = 1 y f(1) = -1 y que el dominio de la función es $D(f)\Rightarrow(-1,\ +\infty)$.

Para estudiar los periodos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos, recurrimos a su derivada:

$$f'(x)=-\frac{2}{L2}\cdot\frac{1}{x+1}<0,\ \ \forall x\in D(f).$$

De la derivada se deduce que la función es monótona decreciente.

Teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left[1-\frac{2}{L2}\cdot L(1+x)\right]=1-\frac{2}{L2}\cdot(-\infty)=1+\infty=\underline{+\infty}$$

La recta x = -1 es una asíntota vertical de la función.

La representación gráfica, aproximada, se refleja en el gráfico adjunto.

****

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN B

1º) Discute el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k \\ 1 & k^2 & k^2 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro k.

Resuelve el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en el caso de k = -1.

$$Rang\ \ A \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k \\ 1 & k^2 & k^2 \end{vmatrix} = k^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & k \end{vmatrix} = k^2 \cdot \left(k + k^2 + 1 - k - k - k\right) = k^2 \cdot \left(k^2 - 2k + 1\right) =$$

$$= k^2 \cdot (k-1)^2 = 0 \Rightarrow \underline{k_1 = 0}\ ;;\ \underline{k_2 = 1}$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix} k \neq 0 \\ k \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ \ A = 3}}\ \ ;;\ \ \underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix} k = 0 \\ k = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ \ A = 1}}$$

Para k = -1 resulta $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y el sistema $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, que es equivalente a : $\begin{cases} x - y + z = a & (1) \\ x - y - z = b & (2) \\ x + y + z = c & (3) \end{cases}$. Resolviendo por la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ b & -1 & -1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(-1)^2 \cdot (-1-1)^2} = \frac{-a+b+c+c+a+b}{4} = \frac{2b+2c}{4} = \underline{\underline{\frac{b+c}{2} = x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & -1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{b+c-a-b+c-a}{4} = \frac{-2a+2c}{4} = \underline{\underline{\frac{-a+c}{2} = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}}{4} = \frac{-c+a-b+a-b+c}{4} = \frac{2a-2b}{4} = \underline{\underline{\frac{a-b}{2} = z}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Sean las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$. Calcula la ecuación del plano π que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las dos rectas. Calcula también la ecuación de la recta t que pasa por el punto P(1, 1, 1) y es perpendicular al plano encontrado.

El plano π puede determinarse por el origen y por los vectores directores de las dos rectas.

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{u} = (2,\ 1,\ 3)$.

Por estar la recta s determinada por dos planos, su vector director puede determinarse teniendo en cuenta que es, al mismo tiempo, perpendicular a los vectores normales a los dos planos, o sea, es cualquier vector linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales a los planos:

$$\overrightarrow{v'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i - 2j - k - 2k - i - j = -3j - 3k = (0,\ -3,\ -3) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v} = (0,\ 1,\ 1)}.$$

$$\pi(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ x + 2z - 3x - 2y = 0\ ;;\ -2x - 2y + 2z = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x + y - z = 0}}$$

La recta t tiene como vector director al vector normal del plano π, $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ -1)$.

La expresión de la recta t por unas ecuaciones continuas es:

$$\underline{\underline{t \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}}}\ \ ó\ \ \underline{\underline{t \equiv x - 1 = y - 1 = -z + 1}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

3º) La anulación de la primera derivada es una condición necesaria para que una función (derivable) presente un extremo relativo. Esta condición, aunque necesaria, no es suficiente. Demuestra con un ejemplo la segunda afirmación. En este mismo contexto, ¿qué podemos decir de la existencia de un punto de inflexión?

En efecto, la condición de anulación de la primera derivada es necesaria pero no es suficiente; un ejemplo ilustrativo lo constituye la función $f(x) = x^3 + k$, siendo a un número real.

La primera derivada es $f'(x) = 3x^2$, que se anula para x = 0; sin embargo la función no tiene un extremo relativo para x = 0.

Para que exista un extremo relativo tiene que cumplirse que se anule la primera derivada y que la segunda derivada sea mayor o menor que cero.

En el caso del ejemplo que nos ocupa se observa que la segunda derivada también se anula para el valor que anula la primera derivada: $f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0$, con lo cual no puede existir ni máximo ni mínimo relativo para el valor x = 0 que anula la primera derivada, lo que demuestra lo pedido.

Un extremo relativo (máximo o mínimo) existe en un punto x = a cuando separa un tramo de curva creciente de otro decreciente o viceversa; para ello se toma un número h suficientemente pequeño y se comprueba que f'(a + h) y f'(a - h) tienen signos distintos, todo lo cual indica que a un lado de a la curva es creciente y al otro decreciente (o viceversa) ; por el contrario, si f'(a + h) y f'(a - h) tienen el mismo signo, la curva es monótona creciente o monótona decreciente en un entorno de a y prueba la no existencia de extremos relativos.

Con respecto a la existencia de un punto de inflexión, es condición necesaria la anulación de la segunda derivada, pero no es condición suficiente; es necesario que la tercera derivada no se anule para el valor o valores que anulan la segunda derivada.

Un punto de inflexión existe en un punto x = a cuando separa un tramo de curva cóncavo de otro convexo; para ello se toma un número h suficientemente pequeño y se comprueba que f''(a + h) y f''(a - h) tienen signos distintos, todo lo cual indica que a un lado de a la curva es convexa y al otro cóncava; por el contrario, si f''(a + h) y f''(a - h) tienen el mismo signo, la curva es totalmente cóncava o totalmente convexa en un entorno de a y prueba la no existencia de puntos de inflexión.

****

www.yoquieroaprobar.es

4º) Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = x - 2\,sen\ x$ y las rectas y = 0, $x = -\frac{\pi}{3},\ x = \frac{\pi}{3}$. Haz un dibujo aproximado de la situación.

Se trata de una función continua en su dominio, que es R, por ser la suma de dos funciones continuas en R, lo cual significa que f(x) es continua en R.

Veamos si la función tiene extremos relativos en el entorno $\left[-\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right]$, que es el que nos interesa para el cálculo del área pedida:

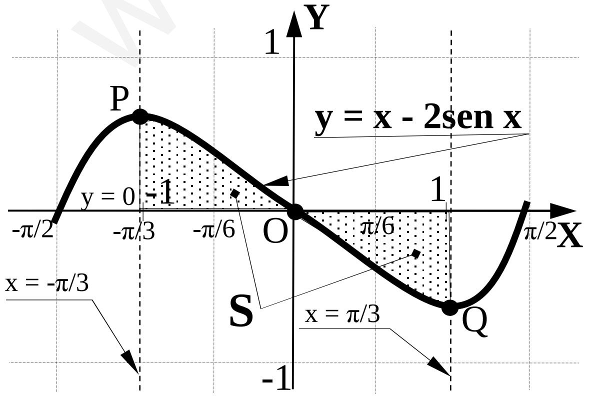
$$f'(x) = 1 - 2\cos\ x = 0\ ;;\ \cos\ x = \frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \underline{x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}}\quad \left(x = k\cdot 360^{o} \pm 60^{o}\right)$$

Para k = 0 $\Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{3}\ ;;\ x_2 = \frac{\pi}{3}$.

$$f''(x) = 2\,sen\ x \Rightarrow \begin{cases} f''\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\,sen\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \underline{Máximo\ \ para\ \ x = -\frac{\pi}{3}} \\ \\ f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\,sen\ \frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}2}{} = \sqrt{3} > 0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ \ para\ \ x = \frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3} - 2\,sen\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\ \Rightarrow Máximo:\ \underline{P\left(-\frac{\pi}{3},\ \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}\right)}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 2\,sen\ \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\ \Rightarrow Mínimo:\ \underline{Q\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi-3\sqrt{3}}{3}\right)}$$



Como puede apreciarse, la función tiene un máximo y un mínimo en los extremos del intervalo dado $\left[-\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right]$ y, considerando que $f(0) = 0 - 2\,sen\ 0 = 0$ y que la función es simétrica con respecto al origen: $f(-x) = -f(x)$, la representación gráfica, aproximada de la situación es la que se puede apreciar en el gráfico adjunto, considerando que las coordenadas del punto máximo es P(-1’05, 0’68) y las del mínimo Q(1’05, -0’68).

www.yoquieroaprobar.es

El área pedida, que es la sombreada de la figura, teniendo en cuenta la simetría de la función, es la siguiente:

$$S = -\ 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\ \cdot dx = \ 2 \cdot \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} (x - \ 2sen\ x)\ \cdot dx = 2 \cdot \left[\frac{x^2}{2} + 2\cos\ x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{0} =$$

$$= 2 \cdot \left[\left(\frac{0^2}{2} + 2\cos\ 0 \right) - \left(\frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{2} + 2\cos\ \frac{\pi}{3} \right) \right] = 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{\pi^2}{18} + 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \right] = 2 \cdot \left(1 - \frac{\pi^2}{18} - 1 \right) = 2 \cdot \frac{\pi^2}{18} =$$

$$= \frac{\pi^2}{9} \cong \underline{\underline{1'10\ u^2 = S}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es