

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE BALEARES****SEPTIEMBRE – 2010 (GENERAL)**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Conteste de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

OPCIÓN A

1º) Determine la ecuación en forma continua de la recta r que pasa por el punto $P(1, 1, 1)$ y es paralela a la recta r_1 de ecuaciones implícitas: $r_1 \equiv \begin{cases} -3x + y - z + 12 = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$.

Expresar la recta r de forma vectorial, por unas ecuaciones paramétricas y por unas ecuaciones implícitas.

El vector director de la recta r_1 es cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector resultante del producto vectorial de los dos vectores normales de los planos que la determinan, que son $\vec{n}_1 = (-3, 1, -1)$ y $\vec{n}_2 = (1, -2, -3)$:

$$\vec{u}' = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -3i - j + 6k - k - 2i - 9j = -5i - 10j + 5k = (-5, -10, 5).$$

Un vector director de r_1 es $\vec{u} = (1, 2, -1)$.

La recta r expresada de las formas que se pide es:

Forma vectorial:

$$\underline{\underline{r \equiv (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 2, -1)}}$$

Por unas ecuaciones paramétricas:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}}}$$

Por unas ecuaciones implícitas: $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$;; $r \equiv \begin{cases} 2x-2 = y-1 \\ -x+1 = z-1 \end{cases}$.

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}}}$$

www.yoquieroaprobar.es

2º) Calcule los valores reales de m para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & m & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}$ no tenga

inversa. Si $m = 2$ calcule, si es posible, la inversa de la matriz A y resuelva el sistema de

ecuaciones $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Una matriz carece de inversa cuando su determinante es cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & m & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{vmatrix} = m^2 + 3 - 4m = 0 \quad ; ; \quad m^2 - 4m + 3 = 0 \quad ; ; \quad m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow \underline{m_1 = 1} \quad ; ; \quad \underline{m_2 = 3}.$$

La matriz A no tiene inversa para los valores $m = 1$ y $m = 3$.

Para $m = 2$ la matriz A es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y su inversa la hallamos a continuación.

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; ; \quad |A| = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1.$$

$$Adj A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ -3 & -\frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 3 & \frac{5}{2} & -4 \end{pmatrix}}}$$

Resolvemos la ecuación:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; ; \quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando por la izquierda por A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ;; I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ;; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 3 & \frac{5}{2} & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2-6 \\ -3-4+12 \\ 3+5-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{x=-2 ;; y=5 ;; z=-4.}}$$

www.yoquieroaprobar.es

3º) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos, los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de la siguiente función: $f(x) = (x-3)^4(x-1)$.

Una función es creciente o decreciente cuando lo es su primera derivada:

$$f'(x) = 4(x-3)^3(x-1) + (x-3)^4 \cdot 1 = (x-3)^3[4(x-1) + (x-3)] = (x-3)^3(4x-4+x-3) = \\ = \underline{(x-3)^3(5x-7) = f'(x)}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x-3)^3(5x-7) \;; \; \underline{x = \frac{7}{5}} \;; \; \underline{x_2 = 3}.$$

Por ser $f(x)$ polinómica es continua en su dominio, que es \mathbb{R} , por lo cual los valores que anulan su derivada dividen el dominio en tres intervalos alternativos de crecimiento y decrecimiento. Para diferenciarlos estudiamos un valor sencillo de uno los intervalos, por ejemplo, para $x = 0$, que es $f'(0) = (0-3)^3(0-7) > 0$.

Teniendo en cuenta lo anterior los intervalos de crecimiento y decrecimiento son:

$$\underline{\underline{Para \; x \in (-\infty, \frac{7}{5}) \cup (3, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow Creciente}}$$

$$\underline{\underline{Para \; x \in (\frac{7}{5}, 3) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow Decreciente}}$$

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) para los valores que anulan la primera derivada; para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: según que sea negativa o positiva para los valores que anulan la primera, se tratará de un máximo o de un mínimo, respectivamente.

$$f''(x) = 3(x-3)^2(5x-7) + (x-3)^3 \cdot 5 = (x-3)^2[3(5x-7) + 5(x-3)] = \\ = (x-3)^2(15x-21+5x-15) = (x-3)^2(20x-36) = \underline{4(x-3)^2(5x-9) = f''(x)}.$$

$$f''(\frac{7}{5}) = 4(\frac{7}{5}-3)^2(5 \cdot \frac{7}{5}-9) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Máximo para \; x = \frac{7}{5}}}.$$

$$f(\frac{7}{5}) = \left(\frac{7}{5}-3\right)^4 \left(\frac{7}{5}-1\right) = \left(-\frac{8}{5}\right)^4 \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2^{13}}{5^5} \Rightarrow \underline{\underline{Máximo relativo: \; A\left(\frac{7}{5}, \frac{2^{13}}{5^5}\right)}}.$$

$$f''(3) = 4(3-3)^2(5 \cdot \frac{7}{5}-9) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{No hay ni máximo ni mínimo relativo para \; x = 3}}.$$

Para que una función tenga un punto de inflexión es necesario que se anule la segunda derivada en ese punto; esta condición, que es necesaria, no es suficiente: es necesario que no se anule la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 4(x-3)^2(5x-9) = 0 \Rightarrow \underline{x = \frac{9}{5}} \ ; \ ; \ \underline{x_2 = 3}$$

$$f'''(x) = 4[2(x-3)(5x-9) + (x-3)^2 \cdot 5] = 4(x-3)[2(5x-9) + (x-3) \cdot 5] =$$

$$= 4(x-3)(10x-18+5x-15) = 4(x-3)(15x-33) = \underline{12(x-3)(5x-11) = f'''(x)}.$$

$$f'''(\frac{9}{5}) = 12(\frac{9}{5}-3)(5 \cdot \frac{9}{5}-11) \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Punto de inflexión para } x = \frac{9}{5}}.$$

$$f(\frac{9}{5}) = \left(\frac{9}{5}-3\right)^4 \left(\frac{9}{5}-1\right) = \left(-\frac{6}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{2^5 \cdot 3^4}{5^5} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Punto inflexión: } B\left(\frac{9}{5}, \frac{2^5 \cdot 3^4}{5^5}\right)}}$$

$$f'''(3) = 12(3-3)(5 \cdot 3-11) = 0 \Rightarrow \underline{\text{No hay Punto de inflexión para } x = 3}.$$

Una función es cóncava (\cap) o convexa (\cup) en un intervalo cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

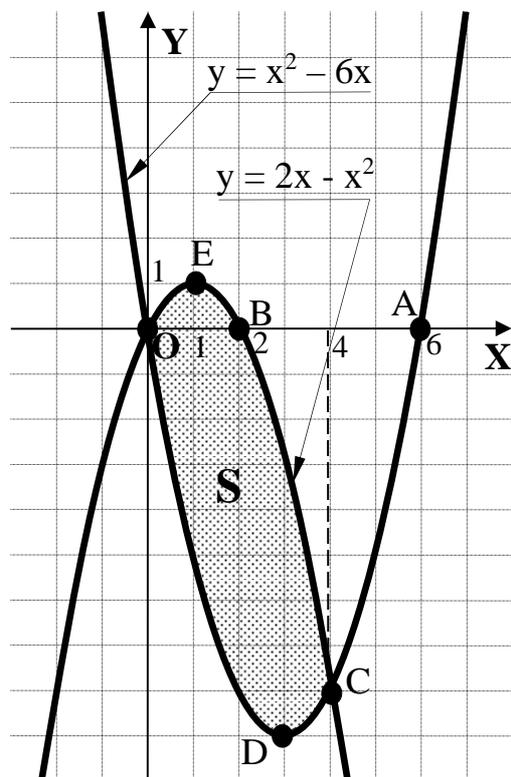
Por ser $f(x)$ polinómica es continua en su dominio, que es \mathbb{R} , por lo cual los valores que anulan su segunda derivada ($x_1 = \frac{9}{5}$ y $x_2 = 3$) dividen el dominio en tres intervalos alternativos de concavidad y convexidad. Para diferenciarlos estudiamos un valor sencillo de uno los intervalos, por ejemplo, para $x = 0$, que es $f''(0) = 4(0-3)^2(0-9) < 0$.

Teniendo en cuenta lo anterior los intervalos de concavidad y convexidad son:

$$\underline{\underline{\text{Para } x \in (-\infty, \frac{9}{5}) \cup (3, +\infty) \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \text{Concavidad } (\cap)}}$$

$$\underline{\underline{\text{Para } x \in (\frac{9}{5}, 3) \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \text{Convexidad } (\cup)}}$$

4º) Haga un dibujo del recinto limitado por las parábolas $y = x^2 - 6x$ e $y = 2x - x^2$. Calcule el área de ese recinto.



$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \underline{O(0, 0)} \\ x_2 = 4 \rightarrow \underline{C(4, -8)} \end{cases} .$$

Los vértices de las parábolas son los siguientes:

$$f(x) = x^2 - 6x \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3 \Rightarrow f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 = 9 - 18 = -9 \\ f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo para } x = 3} \Rightarrow \underline{D(3, -9)} \end{cases}$$

$$g(x) = 2x - x^2 \Rightarrow \begin{cases} g'(x) = 2 - 2x = 0 \rightarrow x = 1 \Rightarrow g(1) = 2 \cdot 1 - 1^2 = 2 - 1 = 1 \\ g''(x) = -2 < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo para } x = 1} \Rightarrow \underline{E(1, 1)} \end{cases}$$

La representación gráfica de la situación es la de la figura.

Para el cálculo del área tendremos en cuenta que las ordenadas de la función $g(x)$ son iguales o mayores que las correspondientes a la función $f(x)$.

$$S = \int_0^4 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_0^4 [(2x - x^2) - (x^2 - 6x)] \cdot dx = \int_0^4 (-2x^2 + 8x) \cdot dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} \right]_0^4 =$$

Los puntos de corte de cada parábola con los ejes son los siguientes:

$$y = x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x - 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \underline{O(0, 0)} \\ x_2 = 6 \rightarrow \underline{A(6, 0)} \end{cases} .$$

$$y = 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \underline{O(0, 0)} \\ x_2 = 2 \rightarrow \underline{B(2, 0)} \end{cases} .$$

Los puntos de corte de las dos funciones se obtienen igualándolas:

$$x^2 - 6x = 2x - x^2 \quad ; ; \quad 2x^2 - 8x = 0 \quad ; ; \quad 2x(x - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 \right]_0^4 = \left(-\frac{2 \cdot 4^3}{3} + 4 \cdot 4^2 \right) - 0 = -\frac{128}{3} + 64 = \frac{-128 + 192}{3} = \underline{\underline{\frac{64}{3} u^2 = S.}}$$

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN B

1º) Determine la ecuación en forma continua de la recta r que pasa por el punto $P(3, 4, 7)$ y es perpendicular a las rectas r_1 y r_2 dadas por: $r_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{2}$ y $r_2 \equiv x-1 = y-2 = \frac{z-3}{4}$. Expresar la recta r en forma vectorial, por unas ecuaciones paramétricas y de forma implícita.

Los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 son $\vec{v}_1 = (2, 3, 2)$ y $\vec{v}_2 = (1, 1, 4)$.

El vector de la recta r puede ser cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores $\vec{v}_1 = (2, 3, 2)$ y $\vec{v}_2 = (1, 1, 4)$.

$$\vec{v}' = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12i + 2j + 2k - 3k - 2i - 8j = 10i - 6j - k = (10, -6, -1).$$

Un vector director de r es $\vec{v} = (10, -6, -1)$.

La recta r expresada en forma continua es:

$$\underline{\underline{r \equiv \frac{x-3}{10} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z-7}{-1}}}$$

La recta r expresada en forma vectorial es:

$$\underline{\underline{r \equiv (x, y, z) = (3, 4, 7) + \lambda(10, -6, -1)}}$$

La recta r expresada por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = 2 + 10\lambda \\ y = 4 - 6\lambda \\ z = 7 - \lambda \end{cases}}}$$

La recta r expresada por unas ecuaciones continuas es:

$$r \equiv \begin{cases} -3x + 9 = 5y - 20 \\ -x + 3 = 10z - 70 \end{cases} \quad ;; \quad \underline{\underline{r \equiv \begin{cases} 3x + 5y - 29 = 0 \\ x + 10z - 73 = 0 \end{cases}}}$$

2º) Discutir el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & a \end{pmatrix}$ en función de los diferentes valores

de α . Resuelva el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ para los valores de α para los cuales el rango de

A es 3.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & a \end{vmatrix} = a + 4 - 15 - 10 - 3 + 2a = 3a - 24 = 0 \quad ; ; \quad a - 8 = 0 \quad ; ; \quad \underline{a = 8}.$$

$$\underline{\underline{Para \quad a \neq 8 \Rightarrow Rango \quad M = 3 \quad ; ; \quad Para \quad a = 8 \Rightarrow Rango \quad M = 2}}$$

Resolvemos el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ para $\alpha \neq 8$, que resulta compatible determi-

nado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix}}{3(a-8)} = \frac{a + 4 - 9 - 6 - 3 + 2a}{3(a-8)} = \frac{3a - 14}{3(a-8)} = x.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & a \end{vmatrix}}{3(a-8)} = \frac{2a + 12 + 15 - 20 - 9 - 2a}{3(a-8)} = \frac{-2}{3(a-8)} = y.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{3(a-8)} = \frac{3 + 2 - 10 - 5 - 2 + 6}{3(a-8)} = \frac{11 - 17}{3(a-8)} = \frac{-6}{3(a-8)} = \frac{-2}{a-8} = z$$

3º) Calcule los valores de los parámetros α , b y c de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de manera que la función $f(x)$ tenga un máximo para $x = -1$, un mínimo para $x = 3$ y pase por el punto $P(0, 5)$.

Por pasar por $P(0, 5)$: $f(0) = 5 \Rightarrow \underline{c = 5}$.

Por tener un máximo para $x = -1$, su derivada tiene que anularse para este valor:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 + 2a \cdot (-1) + b = 0 \quad ; ; \quad \underline{2a - b = 3}.$$

Por tener un mínimo para $x = 3$, su derivada tiene que anularse para este valor:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(3) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 3^2 + 2a \cdot 3 + b = 0 \quad ; ; \quad \underline{6a + b = -27}.$$

Resolviendo el sistema formando por las dos ecuaciones anteriores:

$$\left. \begin{array}{l} 2a - b = 3 \\ 6a + b = -27 \end{array} \right\} \Rightarrow 8a = -24 \quad ; ; \quad \underline{a = -3} \quad ; ; \quad 2a - b = 3 \quad ; ; \quad b = 2a - 3 = -6 - 3 = \underline{-9 = b}.$$

La función resulta ser:

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5}}$$

4º) Demostrar que la ecuación $\operatorname{tag} x = 2x$ tiene una única raíz real en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Demostrar que la ecuación $\operatorname{tag} x = 2x$ tiene una única raíz real en $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ es equivalente a demostrar que la función $f(x) = 2x - \operatorname{tag} x$ tiene una única raíz en el intervalo anterior.

La función $f(x) = 2x - \operatorname{tag} x$ es continua y derivable en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, por lo cual le es aplicable el Teorema de Bolzano en este intervalo.

El teorema de Bolzano dice que: “Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ ”.

Aplicando el teorema de Bolzano a la función $f(x) = 2x - \operatorname{tag} x$ en el intervalo dado $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$:

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tag}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{tag}\frac{-\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} - (-1) = 1 - \frac{\pi}{2} = \frac{2 - \pi}{2} < 0.$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tag}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{tag}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2} > 0.$$

Por otra parte $f'(x) = 2 - \frac{1}{\cos^2 x} > 0, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, lo cual significa que el intervalo considerado la función $f(x) = 2x - \operatorname{tag} x$ es monótona creciente, por lo cual no puede tener más de una raíz en el intervalo considerado.
