PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

JUNIO – 2013

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

OPCIÓN A

1º) a) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a+2 & a-1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, calcule los valores de α para los cuales la matriz $A^2 - A$ no tenga inversa.

b) En el supuesto de α = 1, hallar todas las matrices X que satisfacen A · X + I = A, siendo I la matriz identidad.

----

a)

Una matriz no tiene inversa cuando el valor de su determinante es cero:

$$\left|A^2-A\right|=\left|A\cdot(A-I)\right|=\left|A\right|\cdot\left|A-I\right|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a+2 & a-1 \\ 1 & a \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix}=0 \;;;$$

$$\left(a^2+2a-a+1\right)\left(a^2-1-a+1\right)=0 \;;;\; \left(a^2+a+1\right)\left(a^2-a\right)=0.$$

Por ser $a^2+a+1\neq 0,\ \forall a\in R$, tiene que ser $\left(a^2-a\right)=0 \;;;\; a(a-1)=0 \Rightarrow \underline{a_1=0} \;;;\; \underline{a_2=1}$.

Soluciones:

$$\underline{\underline{A^2-A \text{ no tiene inversa para } a=0 \text{ y para } a=-1}}$$

b)

Para α = 1 es $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$A\cdot X+I=A \;;;\; A\cdot X=A-I$. Multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(A-I) \;;;\; I\cdot X=A^{-1}\cdot(A-I) \Rightarrow \underline{X=A^{-1}\cdot(A-I)}.$$

La inversa de A se hace por el método de Gauss-Jordan:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{cc|cc}3&0&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\leftrightarrow F_1\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&0&1\\3&0&1&0\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\to F_2-3F_1\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&0&1\\0&-3&1&-3\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\to-\tfrac{1}{3}F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&0&1\\0&1&-\tfrac{1}{3}&1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\to F_1-F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\tfrac{1}{3}&0\\0&1&-\tfrac{1}{3}&1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}\tfrac{1}{3}&0\\-\tfrac{1}{3}&1\end{pmatrix}}.$$

$$X=A^{-1}\cdot(A-I)=\begin{pmatrix}\tfrac{1}{3}&0\\-\tfrac{1}{3}&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}3&0\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\tfrac{1}{3}&0\\-\tfrac{1}{3}&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}\tfrac{2}{3}&0\\\tfrac{1}{3}&0\end{pmatrix}}}.$$

****

2º) a) Discuta para que valores de α y b para que el sistema $\left.\begin{array}{r} ax+(2a+1)y-az=1 \\ ax+y-az=-2b \\ ay+(1-a)z=b \end{array}\right\}$ es compatible.

b) Resuélvalo en el caso (o casos) en que sea compatible indeterminado.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} a & 2a+1 & -a \\ a & 1 & -a \\ 0 & a & 1-a \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} a & 2a+1 & -a & 1 \\ a & 1 & -a & -2b \\ 0 & a & 1-a & b \end{pmatrix}.$$

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 2a+1 & -a \\ a & 1 & -a \\ 0 & a & 1-a \end{vmatrix}=a(1-a)-a^3+a^3-a(1-a)(2a+1)=0 \;;;$$

$$a-a^2-a(2a+1-2a^2-a)=0 \;;;\; a-a^2-2a^2-a+2a^3+a^2=0 \;;;\; 2a^3-2a^2=0 \;;;\; 2a^2(a-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{a_1=a_2=0} \;;;\; \underline{a_3=1}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ incóg.\Rightarrow Compatible\ determinado}}$$

(para cualquier valor real de b)

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2b \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ de\ M' \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2b \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2b \end{vmatrix}=2b+1=0 \Rightarrow \underline{b=-\frac{1}{2}}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a=0 \\ b=-\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=2<n^o\ incóg.\Rightarrow Compatible\ indeterminado}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a=0 \\ b\neq -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M=2 \;;;\; Rango\ M'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2b \\ 0 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$ Veamos el rango de M':

$$\{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2b \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = b + 1 + 2b - 3b = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M' = 3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ \left\{ \begin{matrix} a = 1 \\ b \in R \end{matrix} \right\} \Rightarrow Rango\ \ M = 2\ \ ;;\ \ Rango\ \ M' = 3 \ \Rightarrow\ \ Incompatible}}$$

b)

Resolvemos para α = 0 y $b = -\frac{1}{2}$ el sistema es $\left. \begin{matrix} y = 1 \\ y = 1 \\ z = -\frac{1}{2} \end{matrix} \right\}$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \quad \forall \lambda \in R \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}}}$$

****

3º) Considere la función $f(x)=\frac{sen\ x}{\frac{1}{2}+\cos x}$.

a) Verifique que $f(0)=f(\pi)=0$.

b) Compruebe que la ecuación $f'(x)=0$ no tiene ninguna solución en el intervalo (0, π).

c) Explique porqué no es posible aplicar el teorema de Rolle en este caso.

----

a)

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\frac{sen\ 0}{\frac{1}{2}+\cos 0}=\frac{0}{\frac{1}{2}+1}=0 \\ \\ f(\pi)=\frac{sen\ \pi}{\frac{1}{2}+\cos \pi}=\frac{0}{\frac{1}{2}-1}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{f(0)=f(\pi)=0}}$$, como debíamos verificar.

b)

$$f'(x)=\frac{\cos x\cdot\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)-sen\ x\cdot(-sen\ x)}{\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}\cos x+\cos^2 x+sen^2 x}{\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)^2}=\underline{\frac{\frac{1}{2}\cos x+1}{\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)^2}}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\cos x+1}{\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)^2}=0\ ;;\ \frac{1}{2}\cos x+1=0\ ;;\ \cos x+2=0\ ;;\ \cos x=-2 \Rightarrow \underline{x\notin R}.$$

<u>f'(x) = 0 no tiene solución en el intervalo (0, π) ni en ningún otro intervalo real.</u>

c)

El teorema de Rolle dice que "si f(x) es una función continua en el intervalo [α, b] y derivable en (α, b) y si se cumple que f(α) = f(b), existe al menos un punto $c\in(a, b)$ tal que f'(x) = 0".

No es posible aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)=\frac{sen\ x}{\frac{1}{2}+\cos x}$ en el intervalo (0, π) porque f(x) no está definida para $x=120^{\circ}=\frac{3\pi}{4}$ que es un valor del intervalo dado.

****

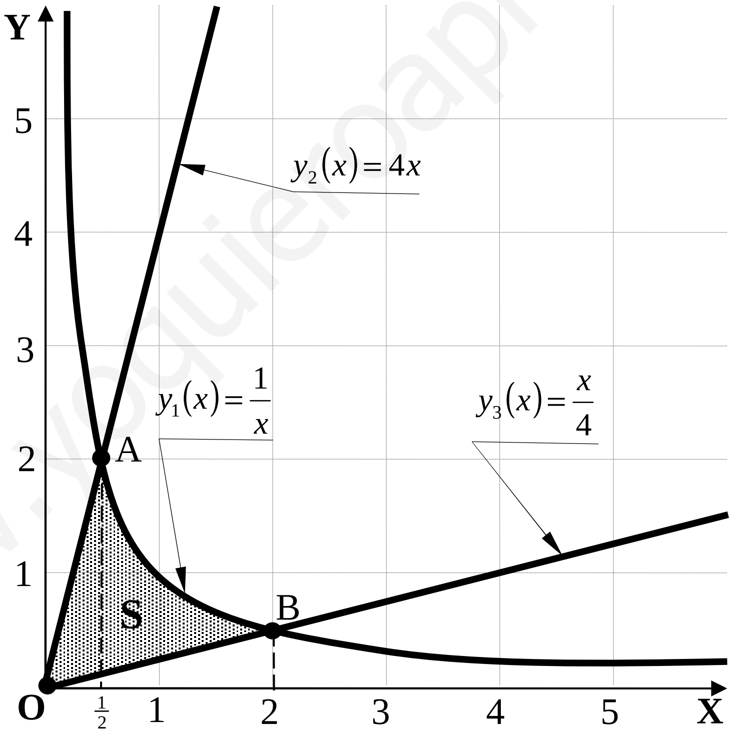
4º) Dibuje el recinto limitado por las curvas $y_1(x)=\frac{1}{x}$, $y_2(x)=4x$ e $y_3(x)=\frac{x}{4}$, para los valores positivos de x. Calcule el área de este recinto.

Los puntos de corte de $y_1(x)=\frac{1}{x}$ con las otras dos funciones en el primer cuadrante son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x)=\frac{1}{x} \\ y_2(x)=4x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x}=4x \;;;\; 4x^2=1 \;;;\; x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{A\left(\frac{1}{2},\ 2\right)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x)=\frac{1}{x} \\ y_2(x)=x/4 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{x}{4} \;;;\; x^2=4 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \underline{B\left(2,\ \frac{1}{2}\right)}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



De la observación de la figura se deduce el área a calcular, que es la siguiente:

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}[y_2(x)-y_3(x)]\cdot dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}[y_1(x)-y_3(x)]\cdot dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(4x-\frac{x}{4}\right)\cdot dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{4}\right)\cdot dx=$$

$$=\left[\frac{4x^2}{2}-\frac{x^2}{8}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[L\,x-\frac{x^2}{8}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}=\left[2x^2-\frac{x^2}{8}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left(L\,2-\frac{2^2}{8}\right)-\left[L\frac{1}{2}-\frac{(1/2)^2}{8}\right]=$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{(1/2)^2}{8} + L2 - \frac{1}{2} - L1 + L2 + \frac{1}{32} = \frac{1}{2} - \frac{1}{32} + L2 - \frac{1}{2} - 0 + L2 + \frac{1}{32} = \underline{2L2}.$$

$$\underline{\underline{S = L4 \cong 1'39\ u^2}}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dados el punto P(1, 1, 1) y el plano $\pi \equiv x - y + z = 5$:

a) Calcule unas ecuaciones continuas de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

b) Calcule el punto simétrico del punto P con respecto al plano π.

----

a)

Un vector normal al plano π es $\vec{n} = (1,\ -1,\ 1)$.

La expresión por unas ecuaciones continuas de la recta r que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π es la siguiente:

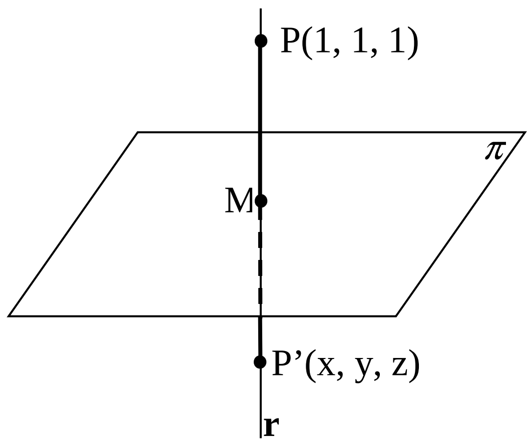
$$\underline{\underline{r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}}}$$

b)

El punto M, intersección del plano π con la recta r, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo cual:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - y + z - 5 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (1+\lambda) - (1-\lambda) + (1+\lambda) - 5 = 0 \ ;;\ 1 + \lambda - 1 + \lambda + 1 + \lambda - 5 = 0 \ ;;$$

$$3\lambda - 4 = 0 \ ;;\ \underline{\lambda = \frac{4}{3}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \\ y = 1 - \frac{4}{3} = \frac{-1}{3} \\ z = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{M\left(\frac{7}{3},\ \frac{-1}{3},\ \frac{7}{3}\right)}.$$



Para que P' sea el punto simétrico de P con respecto a π, tiene que cumplirse lo siguiente:

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MP'} \Rightarrow M-P=P'-M \;;;\; \left(\frac{7}{3},\ \frac{-1}{3},\ \frac{7}{3}\right)-(1,\ 1,\ 1)=(x,\ y,\ z)-\left(\frac{7}{3},\ \frac{-1}{3},\ \frac{7}{3}\right);;$$

$$\left(\frac{4}{3},\ -\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)=\left(x-\frac{7}{3},\ y+\frac{1}{3},\ z-\frac{7}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{7}{3}=\frac{4}{3} \rightarrow \underline{x=\frac{11}{3}} \\ y+\frac{1}{3}=-\frac{4}{3} \rightarrow \underline{y=-\frac{5}{3}} \\ z-\frac{7}{3}=\frac{4}{3} \rightarrow \underline{z=\frac{11}{3}} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{P'\left(\frac{11}{3},\ -\frac{5}{3},\ \frac{11}{3}\right)}}.$$

****

2º) a) Discuta para que valores de α el sistema $\left.\begin{array}{r} ax+(2a+1)y+(1-a)z=0 \\ 3ax+az=a \\ ax+ay+(1-a)z=0 \end{array}\right\}$ es compatible.

b) Resuélvalo en el caso (o casos) en que sea compatible indeterminado.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} a & 2a+1 & 1-a \\ 3a & 0 & a \\ a & a & 1-a \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} a & 2a+1 & 1-a & 0 \\ 3a & 0 & a & a \\ a & a & 1-a & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 2a+1 & 1-a \\ 3a & 0 & a \\ a & a & 1-a \end{vmatrix}=3a^2(1-a)+a^2(2a+1)-a^3-3a(2a+1)(1-a)=0 \;;;$$

$$3a^2-3a^3+2a^3+a^2-a^3-3a(2a-2a^2+1-a)=0 \;;;\; 4a^2-2a^3-3a(-2a^2+a+1)=0 \;;;$$

$$4a^2-2a^3+6a^3-3a^2-3a=0 \;;;\; 4a^3+a^2-3a=0 \;;;\; a(4a^2+a-3)=0 \;;;\; a_1=0 \;;;\; 4a^2+a-3=0 \;;;$$

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{8}=\frac{-1\pm 7}{8} \Rightarrow \underline{a_2=-1} \;;;\; \underline{a_3=\frac{3}{4}}.$$

$$Para \left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ a\neq -1 \\ a\neq \frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow Rango\; M = Rango\; M'=3=n^o\; incóg. \Rightarrow Compatible\; determinado$$

$$Para\; a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\; de\; M'=2}.$$

$$Para\; a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow \underline{Rango\; de\; M'=2}$$

$$Para \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ a=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rango\; M = Rango\; M'=2<n^o\; incóg. \Rightarrow Compatible\; indeterminado$$

$$Para\ \ a=\frac{3}{4}\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{10}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{9}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$ A efectos de rango la matriz M' es equivalente a la matriz $M''=\begin{pmatrix}3 & 10 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow Rango\ \ M''\Rightarrow\{C_1,\ C_2,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}3 & 10 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 3 & 3 & 1\end{vmatrix}=30-9-30=$

$=-9\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=3}$.

$$\underline{\underline{Para\ \ a=\frac{3}{4}\Rightarrow Rango\ M=2\ ;;\ Rango\ M'=3\Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Resolvemos en los casos de α = 0 y α = -1.

Para α = 0 el sistema es $\left.\begin{array}{r}y+z=0\\ 0+0=0\\ z=0\end{array}\right\}$, equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r}y+z=0\\ z=0\end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado.

$$\underline{\underline{Solución:\begin{cases}x=\lambda\\ y=0,\ \forall\lambda\in R\\ z=0\end{cases}}}.$$

Para α = -1 el sistema es $\left.\begin{array}{r}-x-y+2z=0\\ -3x-z=-1\\ -x-y+2z=0\end{array}\right\}$, equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r}x+y-2z=0\\ 3x+z=1\end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado.

Haciendo $\underline{x=\lambda}$: $\left.\begin{array}{l}y-2z=-\lambda\\ 3x+z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\ \underline{z=1-3\lambda}\ ;;\ y=-\lambda+2z=-\lambda+2-6\lambda=\underline{2-7\lambda=y}$.

$$\underline{\underline{Solución:\begin{cases}x=\lambda\\ y=2-7\lambda,\ \forall\lambda\in R\\ z=1-3\lambda\end{cases}}}$$

****

3º) Sea la función $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$:

a) Calcule las asíntotas de la función f(x).

b) Calcule los extremos de la función f(x).

----

a)

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=1 \Rightarrow$$ La recta y = 1 es asíntota horizontal.

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$x^2+1=0\ ;;\ x\notin R \Rightarrow$$ No tiene asíntotas verticales.

Oblicuas: para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador.

f(x) no tiene asíntotas oblicuas.

b)

Una función tiene un extremo relativo para los valores que anulan la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+1)-(x^2+x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x+x^2+1-2x^3-2x^2-2x}{(x^2+1)^2}=\underline{\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0\ ;;\ 1-x^2=0\ ;;\ x^2=1 \Rightarrow \underline{x_1=-1}\ ;;\ \underline{x_2=1}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot(x^2+1)^2-(1-x^2)\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{-2x\cdot(x^2+1)-4x\cdot(1-x^2)}{(x^2+1)^3}=$$

$$=\frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^3}=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}=\underline{\frac{2x\cdot(x^2-3)}{(x^2+1)^3}=f''(x)}.$$

$f''(-1)=\frac{-2\cdot(1-3)}{(1+1)^3}=\frac{4}{8}>0 \Rightarrow$ Mínimo relativo para x = -1.

$f(-1)=\frac{1-1+1}{1+1}=\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo:\ A\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)}}.$

$f''(1)=\frac{2\cdot(1-3)}{(1+1)^3}=\frac{-4}{8}<0 \Rightarrow$ Máximo relativo para x = 1.

$f(1)=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{Máxmo:\ B\left(1,\ \frac{3}{2}\right)}}.$

****

4º) Calcule la siguiente integral indefinida: $I=\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}\cdot dx$.

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & & & & x^2-5x+6 \\ \cline{5-5} -x^3 & +5x^2 & -6x & & x+5 \\ \hline 0 & +5x^2 & -6x & & \\ & -5x^2 & +25x & -30 & \\ \cline{2-4} & 0 & +19x & -30 & \end{array}$$

La división nos permita expresar la fracción de la integral de la forma siguiente:

$\frac{x^3}{x^2-5x+6}=x+5+\frac{19x-30}{x^2-5x+6}$, con lo que la integral sería:

$$I=\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}\cdot dx=\int\left(x+5+\frac{19x-30}{x^2-5x+6}\right)\cdot dx=\int(x+5)\cdot dx+\int\frac{19x-30}{x^2-5x+6}\cdot dx=$$

$$=\underline{\frac{x^2}{2}+5x+I_1=I}. \quad (*)$$

Para resolver la integral I_1 descomponemos factorialmente el denominador:

$$x^2-5x+6=0 \;;;\; x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=2} \\ \underline{x_2=3} \end{cases} \Rightarrow \underline{x^2-5x+6=(x-2)(x-3)}.$$

$$I_1=\int\frac{19x-30}{x^2-5x+6}\cdot dx=\int\frac{19x-30}{(x-2)(x-3)}\cdot dx=\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\right)\cdot dx=\int\frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)}\cdot dx=$$

$$=\int\frac{(A+B)x-(3A+2B)}{x^2-5x+6}\cdot dx \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B=19 \\ 3A+2B=30 \end{array}\right\} \;;;\; \left.\begin{array}{r} -2A-2B=-38 \\ 3A+2B=30 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A=-8} \;;;\; \underline{B=27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1=\int\left(\frac{-8}{x-2}+\frac{27}{x-3}\right)\cdot dx=\underline{-8L|x-2|+27L|x-3|=I_1}.$$

Sustituyendo el valor de I_1 en la expresión (*), queda finalmente:

$$\underline{\underline{I=\frac{x^2}{2}+5x-8L|x-2|+27L|x-3|+C}}$$

****