PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.

OPCIÓN A

1º) Un frutero quiere comprar naranjas y manzanas. Cada kg de naranjas le cuesta 0,6 euros y le proporciona un beneficio de 0,3 euros y cada kg de manzanas le cuesta 1 euro con un beneficio de 0,4 euros. Si sólo dispone de 1.200 euros y su vehículo solo puede transportar 1.500 kg de fruta, se pide, justificando las respuestas:

a) ¿Cuántos kg de naranjas y de manzanas debe comprar para hacer máximos los beneficios?

b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos?

----

a)

Sean x e y los kg de naranjas y manzanas que compra, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 0{,}6x + y \le 1.200 \\ x + y \le 1.500 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3x + 5y \le 6.000 \\ x + y \le 1.500 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\}.$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 0{,}3x + 0{,}4y$.

La región factible se indica en la figura:

① $\Rightarrow 3x + 5y \le 6.000 \Rightarrow y \le \frac{6.000-3x}{5} \Rightarrow O(0, 0) \to Si.$

x	0	1.000
y	1.200	600

② $\Rightarrow x + y \le 1.500 \Rightarrow y \le 1.500 - x \Rightarrow O(0, 0) \to Si.$

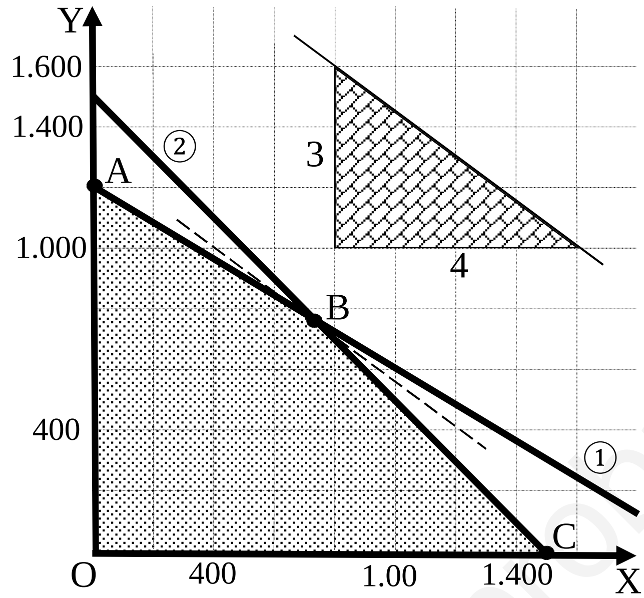
x	0	1.500
y	1.500	0

Los vértices de la zona factible, además del origen, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ 3x + 5y = 6.000 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(0, 1.200)}.$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 5y = 6.000 \\ x + y = 1.500 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B(750, 750)}.$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 1.500 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C(1.500, 0)}.$$



Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 1.200) = 0{,}3 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 1.200 = 0 + 480 = 480.$$

$$B \Rightarrow f(750, 750) = 0{,}3 \cdot 750 + 0{,}4 \cdot 750 = 225 + 900 = \underline{1.125}.$$

$$C \Rightarrow f(1.500, 0) = 0{,}3 \cdot 1.500 + 0{,}4 \cdot 0 = 450 + 0 = 450.$$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 0{,}3x + 0{,}4y = 0 \Rightarrow y = -\frac{0{,}3}{0{,}4}x \Rightarrow m = -\frac{3}{4}.$$

$b)$

$$\underline{Debe\ comprar\ 750\ kg\ de\ naranjas\ y\ 750\ kg\ de\ manzanas.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ esperado\ es\ de\ 1.125\ euros.}$$

****

2º) El porcentaje de agua embalsada en cierto pantano a lo largo del año como función de t (instante de tiempo en meses) viene dado por la función:

$$P(t) = \begin{cases} 50 + at \ si \ 0 \leq t < 4 \\ 90 \ \ si \ 4 \leq t < 5 \\ b(11 - t) \ \ si \ \ 5 \leq t < 9 \\ ct - 30 \ \ si \ \ 9 \leq t \leq 12 \end{cases}.$$

Sabiendo que es una función continua, se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar los valores de las constantes $a, b \ y \ c$.

b) Representar gráficamente el porcentaje de agua embalsada en función del instante de tiempo a lo largo del año.

----

a)

Una función es continua en un punto cuando sus límites laterales existen y son iguales en ese punto e igual al valor de la función.

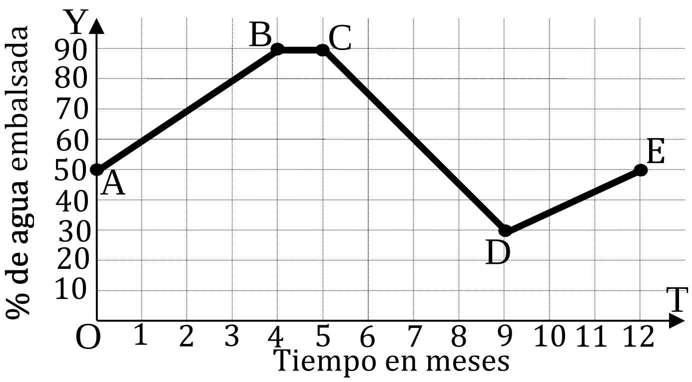
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{t \to 4^-} P(t) = \lim_{t \to 4}(50 + at) = 50 + 4a \\ \lim_{t \to 4^+} P(t) = \lim_{t \to 4} 90 = 90 = P(4) \end{array}\right\} \Rightarrow 50 + 4a = 90; \ \ 4a = 40 \Rightarrow \underline{a = 10}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{t \to 5^-} P(t) = \lim_{t \to 5} 90 = 90 \\ \lim_{t \to 5^+} P(t) = \lim_{t \to 5}[b(11 - t)] = 6b = P(5) \end{array}\right\} \Rightarrow 90 = 6b \Rightarrow \underline{b = 15}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{t \to 9^-} P(t) = \lim_{t \to 9}[b(11 - t)] = 2b \\ \lim_{t \to 9^+} P(t) = \lim_{t \to 9}(ct - 30) = 9c - 30 = P(9) \end{array}\right\} \Rightarrow 30 = 9c - 30 \Rightarrow \underline{c = \frac{20}{3}}.$$

La función resulta: $P(t) = \begin{cases} 50 + 10t \ si \ 0 \leq t < 4 \\ 90 \ \ si \ 4 \leq t < 5 \\ 15(11 - t) \ \ si \ \ 5 \leq t < 9 \\ \frac{20}{3}t - 30 \ \ si \ \ 9 \leq t \leq 12 \end{cases}.$

b)



****

3º) Para que una persona sea contratada en cierta empresa, tiene que superar las pruebas psicológicas P1, P2 y P3, en ese mismo orden. En el momento en que no supera alguna de ellas, no es contratada. Por la experiencia, se sabe que el 96 % de las personas aspirantes a ser contratadas superan P1, que P2 no es superada con probabilidad 0,03 y que el 95 de cada 100 aspirantes superan P3. Determinar, justificando la respuesta, la probabilidad de que una persona aspirante a conseguir empleo en esa empresa no sea contratada.

Los sucesos "ser contratada" y "no ser contratada" son sucesos opuestos o contrarios, por lo tanto, la suma de sus probabilidades es 1 por constituir el "suceso seguro".

$$P(no\ contratada) = 1 - P(contratada).$$

$$P(contratada) = 0{,}96 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}95 = 0{,}88464.$$

$$P(no\ contratada) = 1 - 0{,}88464 = 0{,}11536.$$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ una\ persona\ no\ sea\ contratada\ es\ del\ 11{,}54\ \%.}$

****

OPCIÓN B

1º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, se pide, justificando las respuestas:

$a)$ Determinar su matriz inversa.

$b)$ Teniendo en cuenta el apartado anterior, determinar la matriz $B = 2 \cdot A^{18}$.

$a)$

Por el procedimiento de la matriz adjunta.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1. \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad Adj.\, de\, A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 2F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to -F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.}$$

$b)$

Nótese que la matriz A es ortogonal por ser igual que su inversa, lo cual permite hacer lo siguiente:

$$A^2 = A \cdot A = A \cdot A^{-1} = I.$$

$$B = 2 \cdot A^{18} = 2 \cdot (A^2)^9 = 2 \cdot I^9 = 2I.$$

$$\underline{B = 2 \cdot A^{18} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

****

2º) El consumo de agua, en metros cúbicos, de una industria varía a lo largo de las 8 horas de la jornada laboral de acuerdo con la función:

$$\mathrm{C}(x) = -2x^3 + 27x^2 - 84x + 90, 1 \leq x \leq 8.$$

Siendo $C(x)$ el consumo de agua en la hora x de la jornada laboral. Se pide, justificando las respuestas:

a) ¿A qué horas se producen los consumos máximo y mínimo?

b) Determinar los valores de dichos consumos máximo y mínimo.

c) Determinar los periodos de crecimiento y decrecimiento de dicho consumo a lo largo de la jornada.

----

a)

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es que se anule su primera derivada:

$$C'(x) = -6x^2 + 54x - 84.$$

$$C'(x) = 0 \;\Rightarrow -6x^2 + 54x - 84 = 0;\; x^2 - 9x + 14 = 0;\;\; x = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} =$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} \;\Rightarrow\; x_1 = 2, x_2 = 7.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$C''(x) = -12x + 54 = -6 \cdot (2x - 9).$$

$C''(2) = -6 \cdot (4 - 9) = 30 > 0$ ⇒ Mínimo relativo para x = 2.

$\underline{El\ consumo\ mínimo\ se\ produce\ en\ la\ segunda\ hora\ laboral}.$

$C''(7) = -6 \cdot (14 - 9) = -30 < 0$ ⇒ Máximo relativo para x = 7.

$\underline{El\ consumo\ máximo\ se\ produce\ en\ la\ séptima\ hora\ laboral}.$

b)

$$C(2) = -2 \cdot 2^3 + 27 \cdot 2^2 - 84 \cdot 2 + 90 = -16 + 108 - 162 + 90 = 20.$$

$\underline{El\ consumo\ mínimo\ es\ de\ 20\ m^3}.$

$$C(7) = -2 \cdot 7^3 + 27 \cdot 7^2 - 84 \cdot 7 + 90 = -686 + 1.323 - 588 + 90 = 139.$$

$$\underline{El\ consumo\ máximo\ es\ de\ 139\ m^3}.$$

$c)$

Teniendo en cuenta que la función, por ser polinómica, es continua en su dominio y considerando que el mínimo se produce para x = 2 y el máximo para x = 7, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$Decrecimiento: (0, 2) \cup (7, 8). \qquad Crecimiento: (2, 7).$$

$$\underline{El\ consumo\ de\ agua\ disminuye\ las\ dos\ primeras\ horas\ y\ la\ última.}$$

$$\underline{El\ consumo\ de\ agua\ aumenta\ entre\ la\ segunda\ y\ la\ séptima\ horas.}$$

****

3º) Se seleccionó una muestra de deportistas de alto nivel en cierto país. Se les preguntó si la competición les producía problemas de ansiedad. Los datos recogidos fueron los siguientes:

Sí, Sí, No, Sí, No, No, Sí, Sí, No, No, No, Sí, No, No, Sí, No, Sí, No, No, No.

Determinar, justificando las respuestas:

a) Una estimación del porcentaje de deportistas de alto nivel de ese país con problemas de ansiedad ante la competición.

b) Un intervalo de confianza (al 99 %) para el porcentaje de deportistas de alto nivel de ese país con problemas de ansiedad ante la competición.

c) El error máximo cometido con la estimación dada en el apartado a), con un 99 % de confianza.

----

a)

Nº de síes: 8. Nº de noes: 12.

$$P(ansiedad) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{8}{8+12} = \frac{8}{20} = 0{,}40.$$

$$\underline{La\ competición\ les\ produce\ ansiedad\ al\ 40\ \%\ de\ los\ atletas.}$$

b)

$Confianza\ al\ 99\ \% \Rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}576.$

Considerando p y q como las probabilidades de tener o no ansiedad, respectivamente, se tiene que $p = 0{,}4\ y\ q = 0{,}6$. n = 20.

Ahora se aplica la fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, que es la siguiente: $I.C. = \left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$I.C._{99\ \%} = \left(0{,}4 - 2{,}576 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{20}}, 0'4 + 2{,}576 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{20}}\right) =$$

$$= \left(0{,}4 - 2{,}576 \cdot \sqrt{\frac{0{,}24}{20}}, 0'4 + 2{,}576 \cdot \sqrt{\frac{0{,}24}{20}}\right) =$$

$$= (0{,}4 - 2{,}576 \cdot 0{,}11, 0'4 + 2{,}576 \cdot 0{,}11) = (0{,}4 - 0{,}282, 0'4 + 0{,}282) =$$

$$= (0'118, 0'682).$$

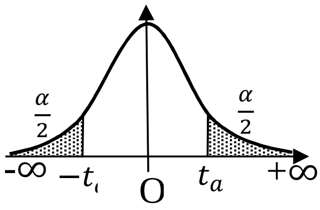
$$\underline{Intervalo\ de\ confianza\ al\ 99\ \%: 11{,}8\ \% - 68{,}2\ \%.}$$

$c)$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2{,}576 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{20}} = 2{,}576 \cdot 0{,}11 = 0{,}282.$$

$\underline{El\ error\ máximo\ que\ se\ comete\ es\ del\ 28{,}2\ \%.}$

****



α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,761	1,695
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,2	1,202	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,098
0,3	1,036	1,015	0,994	0,924	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,4	0,842	0,824	0,806	0,780	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690