PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.

OPCIÓN A

1º) Un taller de confección textil produce dos categorías de trajes: de señora y de caballero. Dispone de material para fabricar diariamente 850 trajes de señora y 650 trajes de caballero. Si tiene que fabricar diariamente como máximo 1.000 unidades totales y el beneficio obtenido por cada traje de señora es de 150 euros y de 200 euros por traje de caballero, se pide, justificando las respuestas:

a) ¿Cuántos trajes de cada tipo han de fabricarse diariamente para hacer máximo el beneficio?

b) El valor de dicho beneficio máximo.

----

a)

Sean x e y el número de trajes de señora y de caballero que fabrica el taller diariamente, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x \leq 850;\ y \leq 650 \\ x + y \leq 1.000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array}\right\}.$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 150x + 200y$.

La región factible se indica en la figura:

$① \Rightarrow x + y \leq 1.000 \Rightarrow y \leq 1.000 - x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

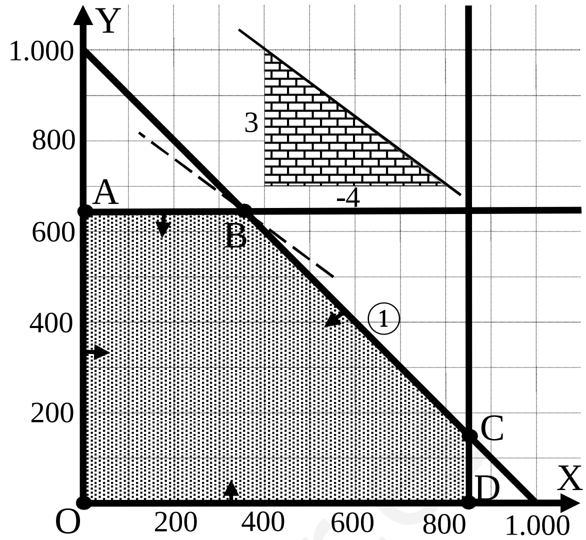
x	1.000	0
y	0	1.0000

Los vértices de la sección factible, además del origen, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 650 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0, 650).$ $B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 1.000 \\ y = 650 \end{array}\right\} \Rightarrow B(350, 650).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 1.000 \\ x = 850 \end{array}\right\} \Rightarrow C(850, 150).$ $D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 850 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(850, 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:



$A \Rightarrow f(0, 650) =$

$= 150 \cdot 0 + 200 \cdot 650 = 0 + 130.000 =$

$= 130.000.$

$B \Rightarrow f(350, 650) =$

$= 150 \cdot 350 + 200 \cdot 650 =$

$= 52.500 + 130.000 = 182.500.$

$C \Rightarrow f(850, 150) = 150 \cdot 850 + 200 \cdot 150 = 127.500 + 30.000 = 157.500.$

$D \Rightarrow f(850, 0) = 150 \cdot 850 + 200 \cdot 0 = 127.500 + 0 = 127.500.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 150x + 200y = 0 \Rightarrow y = -\frac{150}{200}x = -\frac{3}{4} \Rightarrow \boldsymbol{m} = -\boldsymbol{\frac{3}{4}}.$$

$\underline{El\ máximo\ beneficio: haciendo\ 350\ trajes\ de\ mujer\ y\ 650\ de\ hombre.}$

$b)$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ que\ se\ obtiene\ es\ de\ 182.500\ euros.}$

****

2º) El estudio en un laboratorio del tratamiento con antibióticos frente a una bacteria patógena durante 7 días, se ha encontrado que el número de bacterias vivas (en miles) a lo largo de estos 7 días ha variado según la función $B(t) = -t^3 + 12t^2 - 36t + 80$, $1 \leq t \leq 7$, siendo B el número de bacterias vivas (en miles) y t el días de realización del estudio. Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar los días del estudio en los que se ha observado el número máximo y mínimo de bacterias vivas.

b) Hallar los valores de dichos valores máximo y mínimo.

c) Representar de forma aproximada la función $B(t)$ a lo largo de los 7 días del estudio.

----

a)

$$B(1) = -1^3 + 12 \cdot 1^2 - 36 \cdot 1 + 80 = -1 + 12 - 36 + 80 = 55.$$

$$B(7) = -7^3 + 12 \cdot 7^2 - 36 \cdot 7 + 80 = -343 + 588 - 252 + 80 =$$

$$= 668 - 595 = 73.$$

Para que una función polinómica tenga un máximo o un mínimo relativos es necesario que se anule su primera derivada.

$$B'(t) = -3t^2 + 24t - 36.$$

$$B'(t) = 0 \Rightarrow -3t^2 + 24t - 36 = 0;\ \ t^2 - 8t + 12 = 0;\ \ t = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = 4 \pm 2 \Rightarrow t_1 = 2, t_2 = 6.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$B''(t) = -6t + 24.$$

$$B''(2) = -6 \cdot 2 + 24 = -12 + 24 = 12 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ t = 2.$$

$$\underline{El\ mínimo\ se\ produce\ el\ día\ dos.}$$

$$B''(6) = -6 \cdot 6 + 24 = -36 + 24 = -12 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ t = 6.$$

$$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ el\ día\ seis.}$$

$b)$

$$B(2) = -2^3 + 12 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 + 80 = -8 + 48 - 72 + 80 = 48.$$

$$\underline{El\ mínimo\ es\ 48.000\ bacterias}.$$

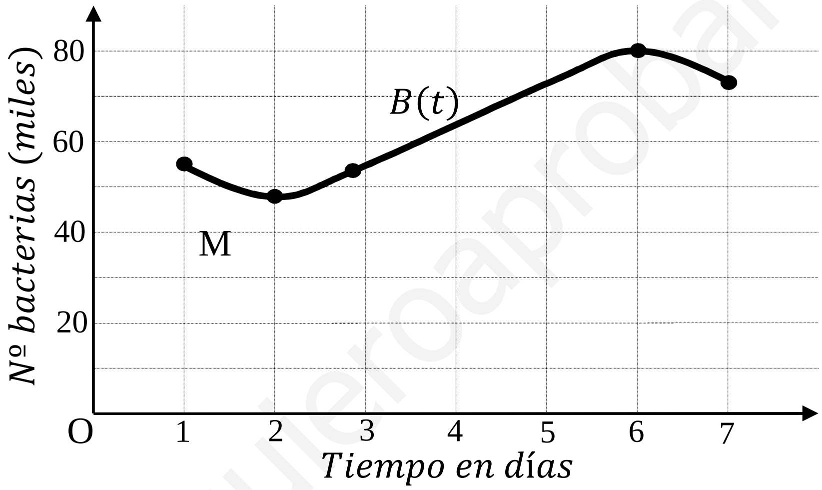
$$B(6) = -6^3 + 12 \cdot 6^2 - 36 \cdot 6 + 80 = -216 + 432 - 216 + 80 =$$

$$= 512 - 432 = 80.$$

$$\underline{El\ máximo\ es\ 80.000\ bacterias}.$$

$c)$

Con los datos de los apartados anteriores puede hacerse una representación gráfica, aproximada, de la función, que es la siguiente:



****

3º) Para realizar el control de calidad en la fabricación de protectores de pantallas de dispositivos móviles se utiliza el intervalo de confianza al 99 % del grosor de los mismos. Se sabe que la distribución del grosor es una normal de desviación típica conocida de 0,1 mm. Una empresa quiere crear su intervalo de confianza y muestra diez protectores con los siguientes grosores (en mm):

0,50 0,43 0,37 0,27 0,60 0,32 0,31 0,27 0,40 0,36

a) Calcular el intervalo de confianza al 99 % del grosor medio de los protectores.

b) Para que el intervalo de confianza sea útil, su longitud debe ser 0,1. ¿Cuántos protectores necesita muestrear la empresa para obtener esa precisión?
Justificar las respuestas.

----

a)

$1-\alpha=0{,}99 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}99=0{,}01 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}005}=\mathbf{2{,}575}$.
$(1-0{,}005=0{,}9950 \;\rightarrow z=2{,}575)$.

$$\overline{x}=\frac{0{,}50+0{,}43+0{,}37+0{,}27+0{,}60+0{,}32+0{,}31+0{,}27+0{,}40+0{,}36}{10}=\frac{3{,}83}{8}=0{,}383.$$

Datos: $\overline{x}=0{,}383;\;\; n=10;\;\; \sigma=0{,}1;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}575.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\;\; \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(0{,}383-2'575\cdot\frac{0{,}1}{\sqrt{10}};\; 0{,}383+2'575\cdot\frac{0{,}1}{\sqrt{10}}\right);$$

$(0{,}383-2'575\cdot 0{,}0316;\; 0{,}383+2'575\cdot 0{,}0316);$

$(0{,}383-0{,}0814;\; 0{,}383+0{,}0814).$

$$\underline{I.C._{99\,\%}\;(0{,}3016;\; 0{,}4644).}$$

b)

Datos: $\sigma=0{,}1;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}575;\;\; E=\frac{0{,}1}{2}=0{,}05.$

$$E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n=\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma}{E}\right)^2=\left(\frac{2{,}575\cdot 0{,}1}{0{,}05}\right)^2=5{,}15^2=26{,}52.$$

$$\underline{El\ tamaño\ de\ la\ muestra\ debe\ ser\ de\ al\ menos\ 27\ protectores\ de\ pantalla.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 4 & -1 & 3\end{pmatrix}, I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$:

a) Determinar si existen las matrices inversas de A y B. En caso afirmativo, calcularlas.

b) Resolver la ecuación matricial $A\cdot X+B=I$.
Justificar las respuestas.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0.$$

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 4 & -1 & 3\end{vmatrix}=-6-4+1+9=0.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ y\ la\ matriz\ B\ no\ es\ invertible}.$$

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\leftrightarrow F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}F_2\to F_2-2F_1\\ F_3\to F_3+F_1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_3\to F_3-2F_2\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 5\end{array}\right)\Rightarrow\ \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}}.$$

b)

$$A\cdot X+B=I;\ \ A\cdot X=I-B;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(I-B);$$

$$I\cdot X=A^{-1}\cdot(I-B)\ \Rightarrow\ \underline{X=A^{-1}\cdot(I-B)}.$$

$$X=A^{-1}\cdot(I-B)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 4 & -1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]=$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & -3 \\ 14 & -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & -3 \\ 14 & -4 & 10 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) La demanda de un producto en función de su precio viene dada por la expresión: $D(x)=\begin{cases} Ax-x^2 \;\; si \;\; 20\le x\le 30 \\ 600-Bx \;\; si\; 30<x\le 60 \end{cases}$, donde D denota la demanda en unidades y x el precio en euros. Se sabe que la demanda para $x=30$ es de 300 unidades y que la función es continua.

a) Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

b) Representar gráficamente la demanda en función de x.

c) Comprobar si la función $D(x)/(x-25)$ tiene alguna asíntota. Encontrarla en caso afirmativo. Justificar la respuesta.

----

a)

$$D(30)=A\cdot 30-30^2=300;\;\; 30A=300+900=1.200 \Rightarrow \underline{A=40}.$$

Para que la función $D(x)$ sea continua en $x=30$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 30^-} \mathrm{D}(x)=\lim\limits_{x\to 30}(40x-x^2)=1.200-900=300=f(30) \\ \lim\limits_{x\to 30^+} D(x)=\lim\limits_{x\to 30}(600-B\cdot 30)=600-30B \end{array}\right\} \Rightarrow$$

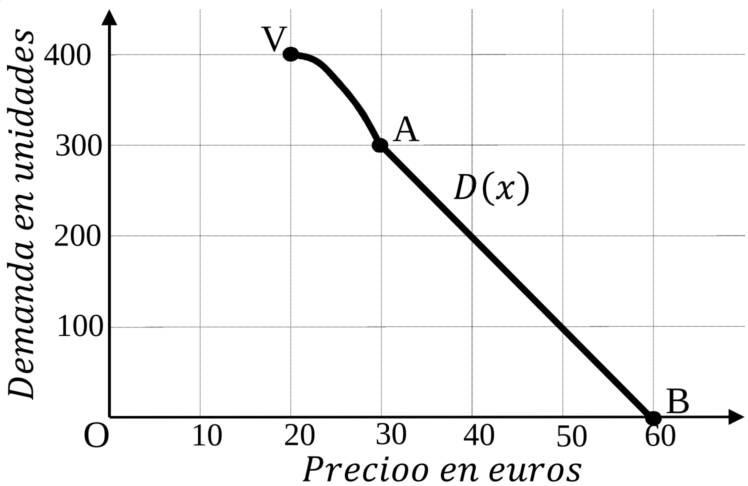
$$\Rightarrow 300=600-30B;\;\; 30B=300 \Rightarrow \underline{B=10}.$$

b)

La función resulta $D(x)=\begin{cases} 40x-x^2 \;\; si \;\; 20\le x\le 30 \\ 600-10x \;\; si\; 30<x\le 60 \end{cases}$.

$$D(20)=40\cdot 20-20^2=800-400=400 \Rightarrow A(20,400).$$

$$D(60)=600-10\cdot 60=600-600=0 \Rightarrow B(60,0).$$



La representación gráfica, aproximada, de la función es la indicada en la figura.

$c)$

La función a considerar es: $f(x) = \frac{D(x)}{x-25} = \begin{cases} \frac{40-x^2}{x-25} & si\ \ 20 \le x \le 30 \\ \frac{600-10x}{x-25} & si\ 30 < x \le 60 \end{cases}$, que tiene como asíntota vertical a la recta $x = 25$ en el intervalo $[20, 30]$ al que pertenece.

En el intervalo $[20, 30]$ tiene una asíntota oblicua por tener el numerador un grado más que el denominador.

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{40-x^2}{x-25}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{40-x^2}{x^2-25x} = -1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{40-x^2}{x-25} + 1 \cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{40-x^2+x^2-25x}{x-25} = -25.$$

$$\underline{\textit{Asíntota oblicua}: y = -x - 25.}$$

En el intervalo $[30, 60]$ tiene una asíntota horizontal por tener el numerador el mismo grado que el denominador.

$$y = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{600-10x}{x-25} = -10.$$

$$\underline{\textit{Asíntota horizontal}:\ y = -10.}$$

****

3º) Una región de bosques está dividida en tres zonas A, B y C. Para el próximo verano la probabilidad de incendio en cada zona es de 0,1; 0,2 y 0,05 respectivamente. En cada zona sólo puede producirse, como máximo, un incendio. Si consideramos que los incendios se producen de forma independiente entre las zonas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ningún incendio?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente dos incendios?

c) Si se sabe que ha habido un incendio, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en la zona A?

Justificar las respuestas.

La probabilidad de que no haya incendios en las zonas A, B y C es 0,9; 0,8 y 0,95 respectivamente.

a)

$$P = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}95 = \underline{0{,}684}.$$

b)

$$P = P\left(\overline{A}, \overline{B}, C\right) + P\left(\overline{A}, B, \overline{C}\right) + P\left(A, \overline{B}, \overline{C}\right) =$$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}05 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}95 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}95 = 0{,}036 + 0{,}171 + 0{,}076 =$$

$$= \underline{0{,}283}.$$

c)

$$P(A/I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)+P(C)} = \frac{0{,}1}{0{,}1+0{,}2+0{,}05} = \frac{0{,}1}{0{,}35} = \underline{0{,}2857}.$$

****