

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)**UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA****JUNIO – 2017**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Elegir una opción entre las dos que se proponen.

OPCIÓN A

1º) Una industria de productos lácteos produce crema de queso de oveja en envases de dos tamaños: pequeño de 100 gramos con un beneficio por envase de 0,50 euros y grande de 300 gramos con un beneficio por envase de 1,40 euros. Cada día dispone de 2.400 kilogramos de crema de queso para envasar. Por razones de mercado el número de envases de 100 gramos producidos diariamente no puede ser mayor de 15.000 y debe ser igual o superior al de envases de 300 gramos. Se pide, justificando las respuestas:

a) ¿Cuántos envases de cada tipo han de producirse diariamente para hacer máximos los beneficios?

b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos?

a)

Sean x e y el número de envases de 100 gramos y de 300 gramos que se producen, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 0,1x + 0,3y \leq 2.400 \\ x \leq 15.000 \\ x \geq y \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 24.000 \\ x \leq 15.000 \\ x \geq y \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}.$$

La función de rendimiento es $f(x, y) = 0,5x + 1,4y$.

$$\textcircled{1} \Rightarrow x + 3y \leq 24.000 \Rightarrow y \leq \frac{24.000 - x}{3} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$$

x	0	24.000
y	8.000	0

$$\textcircled{2} \Rightarrow y \leq x \Rightarrow P(5.000, 0) \rightarrow Si.$$

x	0	24.000
y	0	24.000

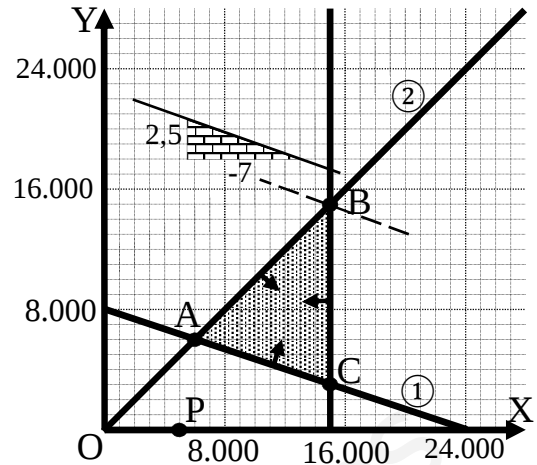
La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 24.000 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow A(6.000, 6.000).$$

$$B \Rightarrow \begin{cases} x = 15.000 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow B(15.000, 15.000).$$

$$C \Rightarrow \begin{cases} x = 15.000 \\ x + 3y = 24.000 \end{cases} \Rightarrow C(15.000, 3.000).$$



Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(6.000, 6.000) = 0,5 \cdot 6.000 + 1,4 \cdot 6.000 = \\ = 3.000 + 8.400 = 11.400.$$

$$B \Rightarrow f(15.000, 15.000) = 0,5 \cdot 15.000 + 1,4 \cdot 15.000 = \\ = 7.500 + 21.000 = 28.500.$$

$$C \Rightarrow f(15.000, 3.000) = 0,5 \cdot 15.000 + 1,4 \cdot 3.000 = \\ = 7.500 + 4.200 = 11.700.$$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 0,5x + 1,4y = 0 \Rightarrow y = -\frac{0,5}{1,4}x = -\frac{5}{14}x = -\frac{2,5}{7} \Rightarrow m = -\frac{2,5}{7}.$$

El beneficio es máximo fabricando 15.000 envases de cada clase.

b)

El beneficio máximo es de 28.500 euros.

2º) El número de visitantes al Museo Nacional de Arte Romano de Mérida en horario de mañana viene dado por la función $V(t) = A - 2.310t + Bt^2 - 10t^3$, $8 \leq t \leq 13$, donde $V(t)$ denota el número de visitantes y t la hora (desde las 8 hasta las 13). Se sabe que el número máximo de visitantes se alcanza para $t = 11$ horas y que a las 12 horas el número de visitantes es 480. Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar los valores de las constantes A y B .

b) Encontrar el número máximo de visitantes.

c) Determinar si la función $\frac{V(t)}{t-10}$ tiene alguna asíntota. En caso afirmativo, determinarla.

a)

$$V(12) = 480 \Rightarrow A - 2.310 \cdot 12 + B \cdot 12^2 - 10 \cdot 12^3 = 480;$$

$$A - 27.720 + 144B - 17.280 = 480; \quad A + 144B = 45.480. \quad (*)$$

Para que una función tenga un máximo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$V'(t) = -2.310 + 2Bt - 30t^2.$$

$$\begin{aligned} V'(11) = 0 &\Rightarrow -2.310 + 2B \cdot 11 - 30 \cdot 11^2 = 0; \quad 22B = 2.310 + 3.630 = \\ &= 5.940; \quad B = \frac{5.940}{22} = 270. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de B:

$$\begin{aligned} A + 144B = 45.480 &\Rightarrow A = 45.480 - 144 \cdot 270 = 45.480 - 38.880 = \\ &= 6.600. \end{aligned}$$

Solución: $A = 6.600$ y $B = 270$.

b)

$$\begin{aligned} V(11) &= 6.600 - 2.310 \cdot 11 + 270 \cdot 11^2 - 10 \cdot 11^3 = \\ &= 110 \cdot (60 - 231 + 297 - 121) = 110 \cdot 5 = 550. \end{aligned}$$

El máximo número de visitantes fue de 550.

c)

$$\frac{V(t)}{t-10} = \frac{6.600 - 2.310t + 270t^2 - 10t^3}{t-10}.$$

No tiene asíntotas horizontales por ser $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V(t)}{t-10} = -\infty$.

Tampoco tiene asíntotas oblicuas; para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el numerador tenga un grado más que el denominador.

Solamente tiene asíntota vertical: $t - 10 = 0 \Rightarrow t = 10$.

La recta $t = 10$ es asíntota vertical.

www.yoquieroaprobar.es

3º) En la exposición de la Facultad de Ciencias “Original o Réplica” hay 42 fósiles, 28 rocas y 36 metales. Se sabe que, de ellos, son originales 6 fósiles, 14 rocas y 20 metales.

a) Si escogemos al azar una pieza de la exposición, ¿cuál es la probabilidad de que sea un metal original?

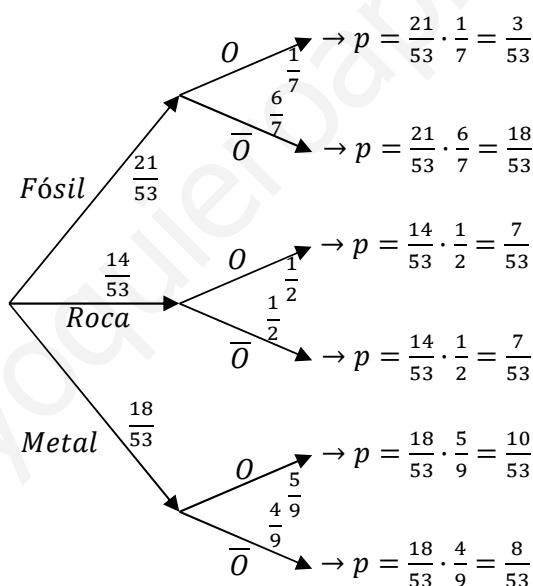
b) Si escogemos al azar una pieza de la exposición, ¿cuál es la probabilidad de que sea réplica?

c) Si escogemos al azar una pieza de la exposición y es una réplica, ¿cuál es la probabilidad de que sea un fósil?

Justificar las respuestas.

$$42 + 28 + 36 = 106.$$

$$P(F) = \frac{42}{106} = \frac{21}{53}, \quad P(R) = \frac{28}{106} = \frac{14}{53}, \quad P(M) = \frac{36}{106} = \frac{18}{53}.$$



a)

$$P = P(M/O) = P(M) \cdot P(O/M) = \frac{18}{53} \cdot \frac{5}{9} = \frac{10}{53} = 0,1887.$$

b)

$$P = P(\bar{O}) = P(F) \cdot P(\bar{O}/F) + P(R) \cdot P(\bar{O}/R) + P(M) \cdot P(\bar{O}/M) =$$

$$= \frac{21}{53} \cdot \frac{6}{7} + \frac{14}{53} \cdot \frac{1}{2} + \frac{18}{53} \cdot \frac{4}{9} = \frac{18}{53} + \frac{7}{53} + \frac{8}{53} = \frac{33}{53} = 0,6226.$$

c)

$$P = P(F/\bar{O}) = \frac{P(F \cap \bar{O})}{P(\bar{O})} = \frac{P(F) \cdot P(\bar{O}/F)}{P(F) \cdot P(\bar{O}/F) + P(R) \cdot P(\bar{O}/R) + P(M) \cdot P(\bar{O}/M)} =$$

$$= \frac{\frac{21 \cdot 6}{53 \cdot 7}}{\frac{21 \cdot 6}{53 \cdot 7} + \frac{14 \cdot 1}{53 \cdot 2} + \frac{18 \cdot 4}{53 \cdot 9}} = \frac{\frac{18}{53}}{\frac{18}{53} + \frac{7}{53} + \frac{8}{53}} = \frac{18}{18+7+8} = \frac{18}{33} = \frac{6}{11} = \underline{0,5455}.$$

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN B

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar las matrices inversas de A y de B.

b) Comprobar que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

c) Hallar la matriz X que verifique $A \cdot X = B$.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1. \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{Adj. de } A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj. de } A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}.$$

$$(B/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 + F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}.$$

b)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 11 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 11 & -8 \end{vmatrix} = -56 + 55 = -1. \quad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Adj. de } (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -11 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{\text{Adj. de } (A \cdot B)^t}{|A \cdot B|} = \frac{\begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -11 & 7 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 11 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 11 & -7 \end{pmatrix}$$

Queda comprobado que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

c)

$$A \cdot X = B; \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B; \quad I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot B}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

www.yoquieroaprobar.es

2º) El número de empleados de una factoría de fabricación de automóviles varía a lo largo del año de acuerdo con la función: $N(t) = t^3 - 21t^2 + 99t + 1.000$, $1 \leq t \leq 12$. Siendo $N(t)$ el número de empleados y t los distintos meses del año. Se pide, justificando las respuestas:

a) ¿A qué meses del año se producen el máximo y el mínimo de empleados?

b) Halla los valores de dichos máximo y mínimo.

c) Representa de forma aproximada la función $N(t)$ en dicho periodo.

a)

Para que una función tenga un máximo o un mínimo relativos es condición necesaria que se anule su primera derivada.

$$N'(t) = 3t^2 - 42t + 99.$$

$$\begin{aligned} N'(t) = 0 &\Rightarrow 3t^2 - 42t + 99 = 0; \quad t^2 - 14t + 33 = 0; \quad t = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 132}}{2} = \\ &= \frac{14 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{14 \pm 8}{2} = 7 \pm 4 \Rightarrow t_1 = 3, t_2 = 11. \end{aligned}$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo:

$$N''(t) = 6t - 42.$$

$$N''(3) = 6 \cdot 3 - 42 = 18 - 42 = -24 < 0 \Rightarrow \text{Máximo para } t = 3.$$

$$N''(11) = 6 \cdot 11 - 42 = 66 - 42 = 24 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo para } t = 11.$$

El máximo de empleados se produce el tercer mes y el mínimo en el once.

b)

$$\begin{aligned} N(3) &= 3^3 - 21 \cdot 3^2 + 99 \cdot 3 + 1.000 = 27 - 189 + 297 + 1.000 = \\ &= 1.324 - 189 = 1.135. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(11) &= 11^3 - 21 \cdot 11^2 + 99 \cdot 11 + 1.000 = \\ &= 1.331 - 2.541 + 1.089 + 1.000 = 3.420 - 2.541 = 879. \end{aligned}$$

El número máximo de trabajadores es 1.135 y el mínimo, 879.

c)

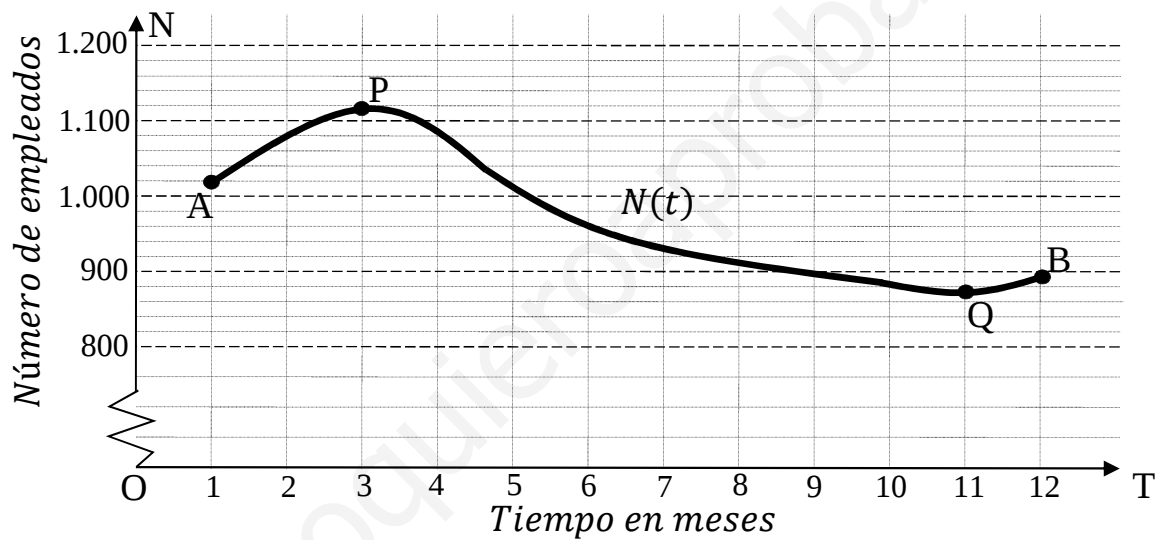
Son puntos de la gráfica el máximo $P(3, 1135)$ y el mínimo $Q(11, 879)$.

$$N(1) = 1^3 - 21 \cdot 1^2 + 99 \cdot 1 + 1.000 = 1 - 21 + 99 + 1.000 = \\ = 79 + 1.000 = 1.079.$$

$$N(12) = 12^3 - 21 \cdot 12^2 + 99 \cdot 12 + 1.000 = \\ = 1.728 - 3.024 + 1.188 + 1.000 = 3.916 - 3.024 = 892.$$

Otros puntos de la función son $A(1, 1079)$ y $B(12, 892)$.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece en la gráfica siguiente.



3º) Una empresa de franquicias ha observado que durante el último año los beneficios han disminuido. Sospecha que hay mala gestión de las tiendas. Realizan un estudio para comprobarlo y de 95 tiendas muestreadas, 28 de ellas tienen mala gestión.

a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % de la proporción de tiendas gestionadas.

b) Si la empresa, quiere que la longitud del intervalo sea 0,1, ¿cuántas tiendas debería muestrear?

a)

Nivel de confianza del 95 %.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = \mathbf{1,96.}$$

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

$$\text{Datos: } n = 95; \quad p = \frac{28}{95}; \quad q = 1 - \frac{28}{95} = \frac{67}{95}; \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \right).$

$$\left(\frac{28}{95} - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{28}{95} \cdot \frac{67}{95}}{95}}; \frac{28}{95} + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{28}{95} \cdot \frac{67}{95}}{95}} \right);$$

$$\left(\frac{28}{95} - 1,96 \cdot 0,0468; \frac{28}{95} + 1,96 \cdot 0,0468 \right); (0,2947 - 0,0917; 0,2947 + 0,0917).$$

$$\underline{I.C._{95\%} = (0'2030; 0'3864)}.$$

b)

$$\sigma = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{28}{95} \cdot \frac{67}{95}}{95}} = 0,0468. \quad E = \frac{0,1}{2} = 0,05.$$

$$\text{Datos: } \sigma = 0,0468; \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96; \quad E = 0,05.$$

$$\text{Siendo } E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \right)^2 = \left(1,96 \cdot \frac{0,0468}{0,05} \right)^2 =$$

$$= (1,96 \cdot 0,936)^2 = 1,8346^2 = 3,37.$$

Debería muestrear como mínimo 4 tiendas.
