PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2022

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

El examen consta de 10 problemas. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

1º) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$. Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial $A\cdot X+C=B^t-2X$, donde B^t es la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

$$A\cdot X+C=B^t-2X;\ \ A\cdot X+2X=B^t-C;\ \ (A+2I)\cdot X=B^t-C;$$

$(A+2I)^{-1}\cdot(A+2I)\cdot X=(A+2I)^{-1}(B^t-C);\ I\cdot X=(A+2I)^{-1}\cdot(B^t-C)\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{X=(A+2I)^{-1}\cdot(B^t-C)}.$

$$B^t-C=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

$$A+2I=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}.$$

$$(A+2I)^t=A+2I=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix};\ \ |A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=5-4=1.$$

$$Adj.de\ (A+2I)^t=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow (A+2I)^{-1}=\frac{Adj.de\ (A+2I)^t}{|A+2I|}=\frac{\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}}{1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A+2I)^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

$$X = (A+2I)^{-1} \cdot (B^t - C) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -11 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}}$$

****

2º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ -x & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

$a)$ Determinar para qué valores de x no existe la matriz inversa de A.

$b)$ Calcular la inversa de A para $x = 2$.

$a)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ -x & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4x + 3 + x^2 = 0;\ x^2 - 4x + 3 = 0;\ x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3.$$

$\underline{La\ matriz\ A\ no\ es\ invertible\ para\ x = 1\ y\ x = 3}.$

$b)$

Para $x = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. $\qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$|A| = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1.$

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -7 & 6 & -4 \end{pmatrix}}.$$

****

3º) Resolver, justificando la respuesta, el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3x + 2y + z = -3 \\ x + y - 2z = -3 \\ 4x + 3y + 2z = -3 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 3 - 16 - 4 + 18 - 4 = 3 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 3.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{-6-9+12+3-18+12}{3} = \frac{27-33}{3} = \frac{-6}{3} = -2.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-18-3+24+12-18+6}{3} = \frac{42-39}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-9-9-24+12+27+6}{3} = \frac{45-42}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

$$\underline{Solución: x = -2,\ y = 1,\ z = 1.}$$

****

4º) En un taller de decoración se venden espejos y cuadros con un beneficio de 120 euros por cada espejo y 180 euros por cada cuadro. Dispone para la venta de 45 artículos en total entre ambos productos que previamente ha fabricado, necesitando 1 hora para la fabricación de cada espejo y 4 horas para elaborar cada cuadro, con una disponibilidad de, como mucho, 60 horas. Calcula el número de espejos y cuadros que debe vender para hacer máximos los beneficios, así como el valor de dichos beneficios máximos.

Sean x e y el número de espejos y cuadros que vende el taller, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+y\le 45 \\ x+4y\le 60 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}.$

$① \Rightarrow x+y\le 45 \Rightarrow y\le 45-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

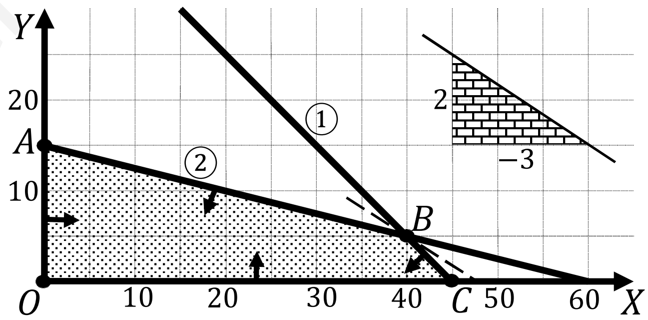
x	20	45
y	25	0

$② \Rightarrow x+4y\le 60 \Rightarrow y\le \dfrac{60-x}{4} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	60
y	15	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+4y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,15).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=45 \\ x+4y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x-y=-45 \\ x+4y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=15;\ \ y=5;\ \ x+20=60;\ \ x=40 \Rightarrow B(40,5).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x+y=45 \end{array}\right\} \Rightarrow x=45 \Rightarrow C(45,0).$

La función de objetivos es $f(x,y)=120x+180y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,15)=120\cdot 0+180\cdot 15=0+2.700=2.700.$

$B \Rightarrow f(40,5)=120\cdot 40+180\cdot 5=4.800+900=5.700.$

$C \Rightarrow f(45,0)=120\cdot 45+180\cdot 0=5.400+0=5.400.$

El valor máximo se produce en el punto $B(40, 5)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 120x + 180y = 0 \Rightarrow y = -\frac{120}{180}x = -\frac{2}{3}x \Rightarrow m = -\frac{2}{3}.$$

$$\underline{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ vendiendo\ 40\ espejos\ y\ 5\ cuadros.}$$

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 5.700\ euros.}$$

****

5º) Los beneficios de una empresa (en miles de euros) (Bt) durante los primeros 10 años dependen del tiempo transcurrido t (en años) desde su creación según la función: $B(t)=\begin{cases} t^2-8t+2A & si\ \ 1\leq t<6 \\ Bt & si\ \ 6\leq t\leq 10 \end{cases}$. Calcular, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la función $B(t)$ es continua y que en el año 8 obtuvo unos beneficios de 16 mil euros.

La función $B(t)$ es continua en su dominio, excepto para el valor de $t=6$, cuya continuidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de $A\ y\ B$.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ t=6 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to 6^-} B(t)=\lim\limits_{t\to 6}(t^2-8t+2A)=2A-12 \\ \lim\limits_{t\to 6^+} B(t)=\lim\limits_{t\to 6}(6B)=6B=B(6) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 6^-} B(t)=\lim_{t\to 6^+} B(t)=B(6) \Rightarrow 2A-12=6B;\ \ A-3B=6. \quad (1)$$

$B(8)=16 \Rightarrow B\cdot 8=16 \Rightarrow \underline{B=2}$.

Sustituyendo el valor de B en (1):

$A-3B=6;\ \ A-3\cdot 2=6;\ \ A-6=6 \Rightarrow \underline{A=12}$.

****

6º) El precio de cierto perfume, $P(x)$, (en euros) depende del porcentaje que contiene de la esencia de cierta flor, x, (en tanto por ciento), de acuerdo con la siguiente función: $P(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 90$, con $0 \leq x \leq 4$. Se pide determinar, razonando las respuestas, para qué porcentajes alcanza este perfume sus precios máximo y mínimo y a cuánto asciendes estos precios.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$P'(x) = 12x^2 - 12x - 24.$

$P'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 12x - 24 = 0;\ \ x^2 - x - 2 = 0;\ \ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = -1 \notin D(P), x_2 = 2 \Rightarrow x = 2.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$P''(x) = 24x - 12.$

$P''(2) = 24 \cdot 2 - 12 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2.$

$\underline{El\ perfume\ alcanza\ su\ mínimo\ valor\ para\ el\ 2\ \%\ de\ esencia.}$

$P(2) = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 90 = 32 - 24 - 48 + 90 = 50.$

$\underline{El\ precio\ mínimo\ del\ perfume\ es\ de\ 50\ euros.}$

$P(0) = 90.$

$P(4) = 4 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 90 = 256 - 96 - 96 + 90 = 154.$

$\underline{El\ perfume\ alcanza\ su\ máximo\ valor\ para\ el\ 4\ \%\ de\ esencia.}$

$\underline{El\ precio\ máxiimo\ del\ perfume\ es\ de\ 154\ euros.}$

****

7º) a) Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = -x^2 + x$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función $g(x) = \frac{3-2x^2}{-x^2+x}$.

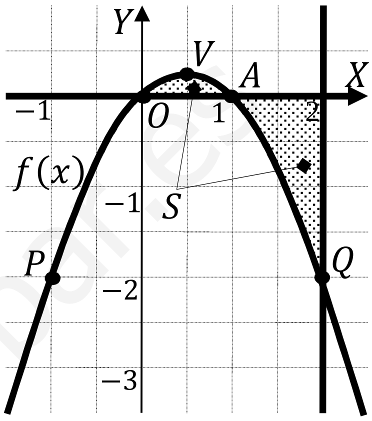
----

a)

La función $f(x) = -x^2 + x$ es una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de x^2 y su vértice es siguiente:

$$f'(x) = -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{-1+2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow V\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$



Los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + x = 0 = -x(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow O(0,0) \\ x_2 = 1 \Rightarrow A(1,0) \end{cases}$. Otros puntos de la parábola son $P(-1,-2)\ y\ Q(2,-2)$.

La representación gráfica de la situación, aproximada, se expresa en la figura adjunta de donde se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 f(x) \cdot dx + \int_2^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 (-x^2 + x) \cdot dx + \int_2^1 (-x^2 + x) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_2^1 = \left[\left(-\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2}\right) - 0\right] + \left[\left(-\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2}\right) - \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2}\right)\right] =$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2}\right) = 2 \cdot \frac{-2+3}{6} + \frac{8}{3} - 2 = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 2 \Rightarrow \underline{S = 1\ u^2}.$$

b)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3-2x^2}{-x^2+x} = 2 \Rightarrow \underline{La\ recta\ y = 2\ es\ asíntota\ horizontal.}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$-x^2 + x = 0;\ -x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_1 = 1.$$

$\underline{Las\ rectas\ x = 0\ (eje\ Y)\ e\ y = 1\ son\ asíntotas\ verticales}.$

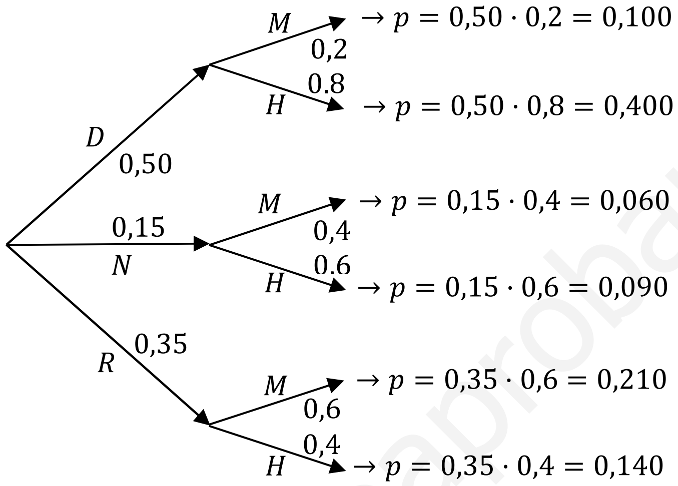
No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las horizontales.

****

8º) En un quiosco de prensa, el 50 % de los clientes compra prensa deportiva, el 15 % prensa nacional y el resto prensa regional. El 20 % de los clientes de prensa deportiva, el 40 % de los de prensa nacional y el 60 % de los de prensa regional son mujeres. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que un cliente de dicho quiosco sea mujer.

b) Calcular la probabilidad de que un cliente, que sabemos que es hombre, compre prensa regional.



a)

$$P = P(M) = P(D \cap M) + P(N \cap M) + P(R \cap M) =$$

$$= P(D) \cdot P(M/D) + P(N) \cdot P(M/N) + P(R) \cdot P(M/R) =$$

$$= 0{,}50 \cdot 0{,}2 + 0{,}15 \cdot 0{,}4 + 0{,}35 \cdot 0{,}6 = 0{,}100 + 0{,}060 + 0{,}210 = \underline{0{,}370}.$$

b)

$$P = P(R/H) = \frac{P(R \cap H)}{P(H)} = \frac{P(R) \cdot P(H/R)}{1 - P(M)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}4}{1 - 0{,}370} = \frac{0{,}140}{0{,}630} = \underline{0{,}2222}.$$

****

9º) El contenido de verdura de los botes de una marca de purés para bebés es una variable que se supone con distribución normal con desviación típica 23 gramos. Se seleccionan al azar 121 botes, registrándose el contenido en verdura de dichos botes, resultando una media de 146 gramos. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95 %, para la cantidad media de verduras que contienen dichos botes de puré. Razona la respuesta.

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$
$(1-0{,}025=0{,}9750 \ \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=121;\ \ \overline{x}=146;\ \ \sigma=23;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma \ y \ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$$\left(146-1{,}96 \cdot \frac{23}{\sqrt{121}};\ 146+1{,}96 \cdot \frac{23}{\sqrt{121}}\right);$$

$$(146-1{,}96 \cdot 2{,}0909;\ 146+1{,}96 \cdot 2{,}0909);\ \ (146-4{,}0982;\ 146+4{,}0982).$$

$$\underline{I.C._{95\,\%}=(141{,}9018;\ 150{,}0982).}$$

****

10º) Una cadena de supermercados tiene en plantilla 3.000 cajeros, 4.000 reponedores y 1.000 transportistas. Se desea obtener una muestra de 200 trabajadores para una encuesta sobre la satisfacción con el puesto de trabajo. Se pide, razonando las respuestas:

a) Atendiendo a razones de proporcionalidad, ¿cuántos cajeros, reponedores y transportistas debería seleccionar la empresa para la encuesta?

b) Si 30 de los cajeros encuestados estaban satisfechos con su trabajo, dar una estimación de la proporción de cajeros satisfechos con su puesto de trabajo.

----

a)

Sean a, b, c el número de cajeros, reponedores y transportistas que componen la muestra de 200 trabajadores de la cadena de supermercados.

$$\frac{a}{3.000} = \frac{b}{4.000} = \frac{c}{1.000} = \frac{a+b+c}{3.000+4.000+1.000} = \frac{200}{8.000} = \frac{1}{40}.$$

$$a = \frac{1}{40} \cdot 3.000 = 75; \;\; b = \frac{1}{40} \cdot 4.000 = 100; \;\; c = \frac{1}{40} \cdot 1.000 = 25.$$

$$\underline{Se\ deben\ seleccionar\ a\ 75\ cajeros, 100\ reponedores\ y\ 25\ transportistas.}$$

b)

$$p = \frac{30}{75} = 0{,}4.$$

$$\underline{El\ 40\ \%\ de\ los\ cajeros\ están\ satisfechos\ con\ su\ trabajo.}$$

****