

**PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)****UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA****JUNIO – 2001**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

**MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Lea cuidadosamente las dos opciones del examen.

Elija una de ellas y conteste a las cuatro cuestiones que figuran en ella.

No conteste a cuestiones correspondientes a diferentes opciones: ello anulará el examen.

**REPERTORIO A**

1º) Definir el producto escalar de vectores y enunciar su relación con los conceptos de ángulo y distancia entre puntos.

-----

Se define el producto escalar de dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  al número real resultante de multiplicar los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que forman, y se expresa de la siguiente forma:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

De la definición de producto escalar se deduce la relación con el ángulo que forman los vectores, ya que:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Dados dos puntos diferentes A y B, su distancia es igual al módulo del vector que determinan,  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ . Al ser los puntos diferentes, es vector no es nulo. Su módulo puede obtenerse multiplicando escalarmente el vector por sí mismo:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{u}|^2 \cdot 1 = |\vec{u}|^2 \Rightarrow d = |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

\*\*\*\*\*

2º) Representar la gráfica de la función  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 0'2$ .

-----  
Por las características de la función, estudiaremos los siguientes apartados:

a) Dominio: Se trata de una función polinómica, por lo tanto:  $D(f) \Rightarrow R$

b) Simetrías: No tiene simetrías, ni con respecto a Y, ni con respecto al origen.

c) Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1) \quad ;; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 6x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Por ejemplo: } f'(1) = 6 \cdot 2 = 12 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Creciente: } (-\infty, -1) \cup (0, \infty) \\ \text{Decreciente: } (-1, 0) \end{cases}$$

d) Máximos y mínimos relativos:

$$f''(x) = 12x + 6 \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \\ f''(-1) = -12 + 6 = -6 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \end{cases}$$

$$f(0) = 0'2 = \frac{1}{5} \Rightarrow \text{Mín} \Rightarrow \left(0, \frac{1}{5}\right) \quad ;; \quad f(-1) = -2 + 3 - \frac{1}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow \text{Máx} \Rightarrow \left(-1, \frac{4}{5}\right)$$

e) Concavidad y convexidad.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x + 6 = 0 \quad ;; \quad x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow (\cap) \text{Cóncava: } \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \\ x > -\frac{1}{2} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow (\cup) \text{Convexa: } \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \end{cases}$$

f) Puntos de inflexión.

$f'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow$  Existe un punto de inflexión para  $x = -\frac{1}{2}$ , valor que anula  $f''(x)$ :

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{5} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10} \Rightarrow \text{P. I.} \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{10}\right)$$

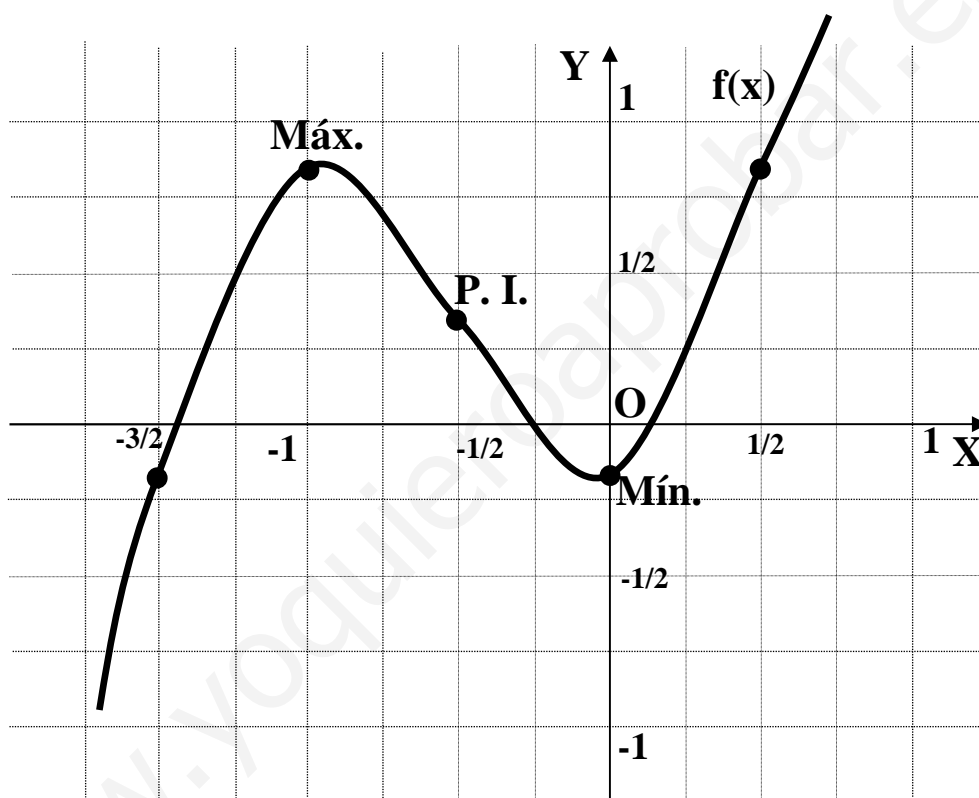
g ) Asíntotas:

Por tratarse de una función polinómica no tiene asíntotas.

h ) Tabla de valores:

x	$-\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$	-2	.....
y	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{21}{5}$	.....
	P. I.	Mín.	Máx			

i ) Representación gráfica:



\*\*\*\*\*

3º) Calcular alguna recta r que sea paralela al plano de ecuación  $\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$  y que también sea paralela al plano que pasa por A(2, 0, 1), B(0, 2, 1) y C(1, -1, 0).

-----  
La ecuación general del plano  $\alpha$  que pasa por los puntos A, B y C se obtiene del modo siguiente:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0, 2, 1) - (2, 0, 1) = (-2, 2, 0).$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (1, -1, 0) - (2, 0, 1) = (-1, -1, -1).$$

$$\alpha(A; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad -2(x-2) + 2(z-1) + 2(z-1) - 2y = 0 \quad ; ;$$

$$-2x + 4 + 4z - 4 - 2y = 0 \quad ; ; \quad -2x - 2y + 4z = 0 \quad ; ; \quad \underline{\alpha \equiv x + y - 2z = 0}$$

La recta s, intersección de los planos  $\pi$  y  $\alpha$  es:  $s \equiv \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$ .

La expresión de la recta s por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 - \lambda \\ x + y = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = -1 + \lambda \\ x + y = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 3y = -1 + 3\lambda \quad ; ;$$

$$\underline{y = -\frac{1}{3} + \lambda} \quad ; ; \quad x + y = 2\lambda \quad ; ; \quad x - \frac{1}{3} + \lambda = 2\lambda \quad ; ; \quad \underline{x = \frac{1}{3} + \lambda} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{3} + \lambda \\ y = -\frac{1}{3} + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Todas las rectas paralelas a s tienen como vector director  $\vec{w} = (1, 1, 1)$ .

La recta pedida r, es paralela a s, por tanto, basta con tomar un punto cualquiera que no pertenezca a ninguno de los planos  $\pi$  y  $\alpha$ , por ejemplo: P(1, 2, 3).

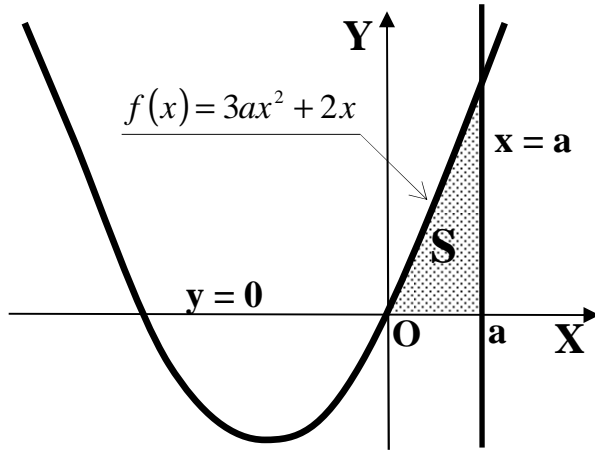
$$\underline{\underline{r(P, \vec{w}) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}}}$$

\*\*\*\*\*

4º) Determinar una constante positiva  $a$ , sabiendo que la figura plana limitada por la parábola  $y = 3ax^2 + 2x$ , la recta  $y = 0$  y la recta  $x = a$  tiene de área  $S = (a^2 - 1)^2$ .

-----

La representación gráfica, aproximada, de la parábola es la que indica la figura.



$$S = \int_0^a f(x) \cdot dx = (a^2 - 1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^a (3ax^2 + 2x) \cdot dx = \left[ \frac{3ax^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right]_0^a =$$

$$= [ax^3 + x^2]_0^a = (a \cdot a^3 + a^2) - 0 =$$

$$= a^4 + a^2 = (a^2 - 1)^2 = a^4 - 2a^2 + 1 ; ;$$

$$a^2 = -2a^2 + 1 ; ; 3a^2 = 1 ; ; a^2 = \frac{1}{3} ; ; a = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow (a > 0) \Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{\sqrt{3}}{3}}}$$

\*\*\*\*\*

## REPERTORIO B

1º) Discutir el sistema de ecuaciones lineales 
$$\left. \begin{array}{l} ax - ay + az = a \\ (3 - 2a)z = 1 \\ x + (a - 1)y = 0 \end{array} \right\}, \text{ según el valor de } a.$$

-----

El sistema es equivalente a 
$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ (3 - 2a)z = 1 \\ x + (a - 1)y = 0 \end{array} \right\}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 - 2a \\ 1 & a - 1 & 0 \end{pmatrix};; M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 - 2a & 1 \\ 1 & a - 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 - 2a \\ 1 & a - 1 & 0 \end{vmatrix} = (3 - 2a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a - 1 \end{vmatrix} = (3 - 2a) \cdot (a - 1 + 1) = a(3 - 2a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Determinado}$$

---

$$\text{Para } \underline{a = 0} \text{ es } M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = -C_2\} \Rightarrow \text{Rango de } M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 3 + 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango de } M' = 3}$$

$$\text{Para } a = \frac{3}{2} \text{ es } M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango de } M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\text{Rango de } M' = 3}$$

$$\text{Para } \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M \neq \text{Rango } M' \Rightarrow \text{Incompatible}$$

---

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es

2º) Calcular el valor de  $\int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}} \cdot dx$ .

-----

$$I = \int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}} \cdot dx = \int_0^1 x \cdot e^{-x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x^2 = t \\ x dx = -\frac{1}{2} \cdot dt \end{array} \right\} \left\| \begin{array}{l} x=1 \rightarrow t=-1 \\ x=0 \rightarrow t=0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^{-1} e^t \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot [e^t]_0^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot (e^{-1} - e^0) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{e} - 1\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-e}{e} =$$

$$= \frac{e-1}{2e} u^2 = I$$

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es



3º) Dadas las funciones  $f(x) = x^2 + \pi$  y  $g(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ , calcular la derivada en  $x = 0$  de las funciones  $f[g(x)]$  y  $g[f(x)]$ .

-----

$$\begin{aligned} f[g(x)] &= f(\operatorname{sen} x + \cos x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + \pi = \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos^2 x + \pi = \\ &= 1 + \operatorname{sen}(2x) + \pi = \underline{\operatorname{sen}(2x) + \pi} = f[g(x)] \end{aligned}$$

$$\underline{f'[g(x)] = 2 \cdot \cos(2x)} \Rightarrow \text{Para } x = 0 \Rightarrow f'[g(0)] = 2 \cdot \cos 0 = 2 \cdot 1 = 2 = \underline{\underline{f'[g(0)]}}$$

$$g[f(x)] = g(x^2 + \pi) = \underline{\operatorname{sen}(x^2 + \pi) + \cos(x^2 + \pi)} = g[f(x)]$$

$$g'[f(x)] = 2x \cdot \cos(x^2 + \pi) - 2x \cdot \operatorname{sen}(x^2 + \pi) = \underline{2x[\cos(x^2 + \pi) - \operatorname{sen}(x^2 + \pi)]} = g'[f(x)]$$

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{g'[f(x)] = 0}}$$

\*\*\*\*\*

4º) Calcular un vector de módulo 1 que sea ortogonal a los vectores  $\vec{u} = (1, 0, 2)$  y  $\vec{v} = (2, 1, 0)$ .

-----

Sabiendo que el producto vectorial de dos vectores es otro vector perpendicular a ambos, el vector  $\vec{z} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  es perpendicular a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ :

$$\vec{z} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k + 4j - 2i = -2i + 4j + k = \underline{\underline{(-2, 4, 1) = \vec{z}}}$$

El vector pedido es un vector unitario de la misma dirección que  $\vec{z}$ , que se llama versor de  $\vec{z}$ , y puede haber dos, que son opuestos y se obtienen teniendo en cuenta que un vector dividido por su módulo resulta un versor del vector; son los siguientes:

$$\pm \frac{(-2, 4, 1)}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{(-2, 4, 1)}{\sqrt{21}} \Rightarrow \text{Soluciones:}$$

$$\underline{\underline{\vec{z}_1 = \left( \frac{-2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}} \right)}} \text{ y } \underline{\underline{\vec{z}_2 = \left( \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{-4}{\sqrt{21}}, \frac{-1}{\sqrt{21}} \right)}}$$

\*\*\*\*\*