

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA****SEPTIEMBRE – 2002**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.
Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2'5 puntos como máximo.

REPERTORIO A

1º) Representar gráficamente la función $f(x) = x^3 + x^{-3}$, determinando sus extremos (máximos y mínimos relativos).

Para representar gráficamente la función vamos a estudiar los siguientes puntos:

I) Dominio: $f(x) = x^3 + x^{-3} = x^3 + \frac{1}{x^3} = \frac{x^6 + 1}{x^3} \Rightarrow D(f) \Rightarrow R - \{0\}$.

II) Corte con los ejes:

Eje X $\Rightarrow y = f(x) = 0 \Rightarrow x^6 + 1 = 0$; $x \notin R \Rightarrow$ La función no corta al eje X.

Eje Y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{0} = \infty \notin R \Rightarrow$ La función no corta al eje Y.

III) Simetrías:

Con respecto al eje Y $\Rightarrow$ No es una función par. No es simétrica a Y.

Con respecto al origen $\Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Es simétrica con respecto al origen.

IV) Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{6x^5 \cdot x^3 - (x^6 + 1) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{6x^6 - 3x^6 - 3}{x^4} = \frac{3x^6 - 3}{x^4} = \frac{3(x^6 - 1)}{x^4} = f'(x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3(x^6 - 1)}{x^4} = 0 \quad ; \quad x^6 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Para } |x| > 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \text{Creciente } (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$\text{Para } |x| < 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \text{Decreciente } (-1, 0) \cup (0, 1)$$

V) Máximos y mínimos relativos:

$$f''(x) = \frac{18x^5 \cdot x^4 - 3(x^6 - 1) \cdot 4x^3}{x^8} = \frac{18x^9 - 12x^9 + 12}{x^5} = \frac{6x^9 + 12}{x^5} = \frac{6(x^6 + 2)}{x^5} = f''(x)$$

$$f''(1) = \frac{6(1+2)}{1^5} = \frac{18}{1} = 18 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo para } x = 1.$$

$$f(1) = \frac{1^6 + 1}{1^3} = \frac{1+1}{1} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow \text{Máximo relativo} \Rightarrow \underline{\underline{P(1, 2)}}$$

$$\text{Por simetría con respecto al origen} \Rightarrow \text{Mínimo relativo} \Rightarrow \underline{\underline{Q(-, -2)}}$$

VI) Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = \frac{6(x^6 + 2)}{x^5} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \text{Convexidad } (\cup) \Rightarrow (0, +\infty) \\ x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \text{Concavidad } (\cap) \Rightarrow (-\infty, 0) \end{cases}$$

$$\text{VII) } \underline{\text{Puntos de inflexión:}} \quad f''(x) = \frac{6(x^6 + 2)}{x^5} = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R} \Rightarrow \underline{\text{No tiene puntos de inflexión.}}$$

VIII) Asíntotas:

$$\text{Paralelas a X: } y = k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + 1}{x^3} = \infty \Rightarrow \underline{\text{No tiene.}}$$

$$\text{Paralelas a Y: } x^5 = 0 \rightarrow \underline{x = 0}$$

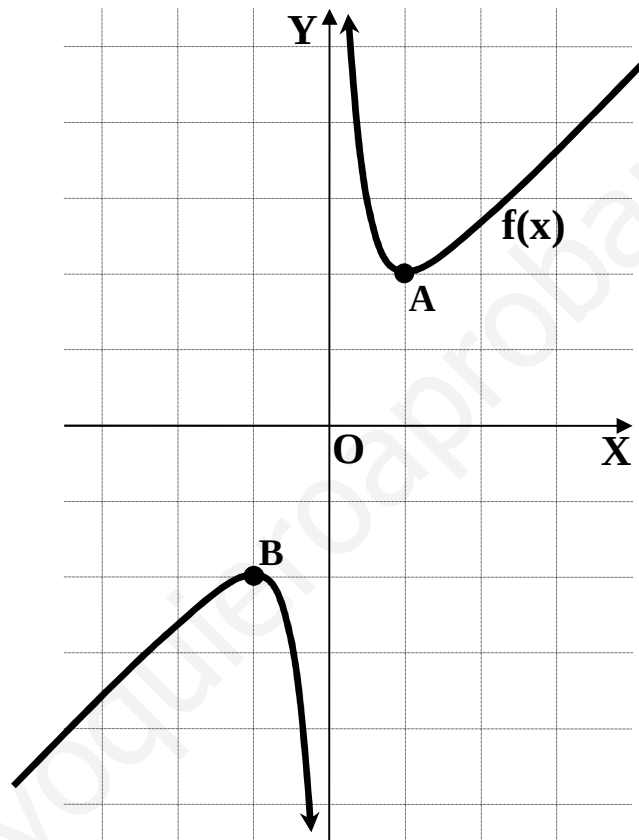
Oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^6 + 1}{x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + 1}{x^4} = \infty \Rightarrow \underline{\text{No tiene}}$$

IX) Tabla de valores:

x	1	-1	2	-2	
f(x)	2	-2	$\frac{65}{8}$	$-\frac{65}{8}$	
	Máx.	Mín.			

X) Representación gráfica:



2º) Representar gráficamente el recinto del plano limitado, en la región donde la ordenada de x es positiva, por la recta $x = 1$, la hipérbola $x \cdot y = 1$, y la recta $6y - x + 1 = 0$. Calcular su área.

Los puntos de corte de la hipérbola con las rectas son los siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ x \cdot y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 \cdot y = 1 \;; \; y = 1 \Rightarrow \underline{A(1, 1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 6y - x + 1 = 0 \\ x \cdot y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{1}{x} \;; \; \frac{6}{x} - x + 1 = 0 \;; \; 6 - x^2 + x = 0 \;; \; x^2 - x - 6 = 0 \;;$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 3 \;; \; y_1 = \frac{1}{3} \rightarrow \underline{B\left(3, \frac{1}{3}\right)} \\ x_2 = -2 \;; \; y_2 = -\frac{1}{2} \rightarrow \underline{C\left(-2, -\frac{1}{2}\right)} \end{array} \right.$$

3º) La matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es la siguiente: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Hallar un sistema equivalente tal que los tres coeficientes que están por encima de la diagonal principal de la nueva matriz sean nulos.

4º) Determinar si el plano $\pi \equiv 3x - 2y + z = 1$ es perpendicular a la recta t cuyas ecuaciones son $t \equiv \begin{cases} -x = 3y + 3z \\ y + 2z = -1 \end{cases}$. Determinar también si es paralelo a la recta r que pasa por los puntos $A(1, -1, 1)$ y $B(-1, -1, 0)$.

REPERTORIO B

1º) Enunciar la Regla de L'Hopital y calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(2\pi x)}{(x-1)^2}$.

2º) Discutir el sistema de ecuaciones lineales
$$\left. \begin{array}{l} ay + az = 0 \\ x + z = 0 \\ 4x - 2y + az = a \end{array} \right\} \text{según los valores del parámetro } a.$$

3º) Calcular el área del cuadrilátero de vértices A(1, 0, 1), B(2, 0, 2), C(1, 2, 1) y D(3, 1, 3).

4º) Calcular una primitiva de la función $f(x) = (x^2 + 1)^{-1} \cdot x$ que se anule para $x = 2$.
