PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

SEPTIEMBRE - 2003

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen.
Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2'5 puntos como máximo.

REPERTORIO A

1º) Dar un ejemplo de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas que sea compatible e indeterminado. Interpretarlo geométricamente.

Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas compatible representa a tres planos en el espacio que tienen, por lo menos, un punto en común. Si únicamente tienen un punto en común el sistema es compatible determinado; si tienen más de un punto en común el sistema es compatible indeterminado, pudiendo presentarse los dos siguientes casos:

1º) Que los tres planos sean coincidentes.

$$\text{Ejemplo: } \left.\begin{array}{r} x-y+2z=3 \\ 3x-3y+6z=9 \\ 2x-2y+4z=6 \end{array}\right\}$$

2º) Que dos planos sean coincidentes y secantes al tercero, en cuyo caso tienen una recta en común.

$$\text{Ejemplo: } \left.\begin{array}{r} x-y+2z=3 \\ 3x-3y+6z=9 \\ x+2y+3z=16 \end{array}\right\}$$

3º) Que los planos sean secantes en una recta, es decir, que constituyan un haz de planos, por ejemplo:

$$(x+y+z-1)+\lambda(3x-y+2z+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \rightarrow x+y+z=1 \\ \lambda=1 \rightarrow 4x+3z=-1 \\ \lambda=2 \rightarrow 7x-y+5z=-5 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 4x+3z=-1 \\ 7x-y+5z=-5 \end{array}\right\}$$

****

2º) Con un alambre de 2 metros se desea formar un cuadrado y un círculo. Determinar el lado del cuadrado y el radio del círculo para que la suma de las áreas sea mínima.

Llamando l_1 a la longitud del cuadrado y l_2 a la longitud del círculo; r al radio del círculo y l al lado del cuadrado:

$$L = l_1 + l_2 = 4 \cdot l + 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \ metros \ ;; \ 2l + \pi r = 1 \ ;; \ l = \frac{1 - \pi r}{2} \quad (*)$$

$$A = l^2 + \pi r^2 = \left(\frac{1 - \pi \cdot r}{2} \right)^2 + \pi r^2 = \frac{1 - 2\pi r + \pi^2 r^2}{4} + \pi r^2 =$$

$$= \underline{\frac{1}{4}\left(1 - 2\pi r + \pi^2 r^2 + 4\pi r^2\right) = A}$$

$$A' = \frac{1}{4}\left(-2\pi + 2\pi^2 r + 8\pi r\right) = 0 \ \Rightarrow \ ;; \ 2\pi\left(-1 + \pi r + 4r\right) = 0 \ ;; \ r\left(\pi + 4\right) = 1 \ ;;$$

$$\underline{\underline{r = \frac{1}{\pi + 4} \ metros}}$$

$$l = \frac{1 - \pi r}{2} = \frac{1 - \pi \cdot \frac{1}{\pi + 4}}{2} = \frac{1 - \frac{\pi}{\pi + 4}}{2} = \frac{\pi + 4 - \pi}{2\left(\pi + 4\right)} = \underline{\underline{\frac{2}{\pi + 4} = l = 2r}}$$

Expresados en centímetros, aproximadamente, es:

$$r = \frac{100}{3'14 + 4} = \frac{100}{7'14} \cong \underline{\underline{14 \ cm = r}} \quad ;; \quad l = 2r \cong \underline{\underline{28 \ cm = \ell}}$$

****

3º) Calcular el valor de $I=\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$. (Puede hacerse con el cambio de variable $t=e^{-x}$).

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}=\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\cdot dx=\int_0^1 \frac{1+e^x-e^x}{e^x+1}\cdot dx=\int_0^1 \frac{1+e^x}{e^x+1}\cdot dx-\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\cdot dx=$$

$$=\int_0^1 dx-\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\cdot dx=[x]_0^1-\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\cdot dx=1-0-\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\cdot dx=1-I_1=I \qquad (*)$$

$$I_1=\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} e^x+1=t \\ e^x\cdot dx=dt \end{array} \middle\| \begin{array}{c} x=1\rightarrow t=e+1 \\ x=0\rightarrow t=2 \end{array}\right\} \Rightarrow I_1=\int_2^{e+1} \frac{dt}{t}=[L\,t]_2^{e+1}=$$

$$=L(e+1)-L\,2=\underline{L\frac{e+1}{2}=I_1}$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de I_1 queda:

$$I=1-L\frac{e+1}{2}\cong 1-L1'86\cong \underline{\underline{0'38\;u^2=I}}$$

****

4º) Sabiendo que los lados de un rectángulo ABCD miden 1 y 3 metros, calcular el producto escalar $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD}$, y el módulo del producto vectorial $\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{BA}$.

Considerando unos ejes de coordenadas cuyo origen es D, las coordenadas de los puntos son las siguientes: D(0, 0), C(0, 1), B(3, 1) y A(3, 0).

Los vectores son los siguientes: $\begin{cases} \overrightarrow{CB} = B - C = (3, 1) - (0, 1) = (3, 0) \\ \overrightarrow{AD} = D - A = (0, 0) - (3, 0) = (-3, 0) \\ \overrightarrow{BA} = A - B = (3, 0) - (3, 1) = (0, -1) \end{cases}$

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD} = (3, 0) \cdot (-3, 0) = -9 + 0 = \underline{\underline{-9 = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD}}}$$

$$\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{BA} = \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right\| = \left| -3k \right| = \underline{\underline{3 = \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{BA}}}$$

****

REPERTORIO B

1º) Definir el producto de matrices. Dar un ejemplo de dos matrices A, B con dos filas y dos columnas, tales que A · B no coincida con B · A.

Sean las matrices A y B. Para que pueda efectuarse su producto sus dimensiones tienen que ser las siguientes: A, m x k ; B, k x n. Es decir: para que dos matrices puedan multiplicarse es necesario que: el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda. La dimensión de la matriz producto P es m x n.

Para explicar el proceso de la multiplicación de dos matrices, supongamos el producto de una matriz fila F, 1 x n, por otra matriz columna, C, n x 1. El producto sería:

$$F \cdot C = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix} = f_1 c_1 + f_2 c_2 + \cdots + f_n c_n$$

Supongamos ahora las matrices A, de dimensión m x k, a cuyas filas llamaremos de la forma $F_1, F_2, \cdots, F_m$ y B, de dimensión n x k, a cuyas columnas llamaremos de la forma $C_1, C_2, \cdots, C_n$.

La matriz producto A · C se expresa de la forma:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} F_1 \cdot C_1 & \cdots & F_1 \cdot C_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F_m \cdot C_1 & \cdots & F_m \cdot C_n \end{pmatrix}}}$$

El producto de matrices tiene las siguientes propiedades:

Asociativa: (A · B) · C = A · (B · C)

Distributiva por la derecha y por la izquierda de la multiplicación con respecto a la suma: $\left\{ \begin{array}{l} A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \\ \\ (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \end{array} \right\}$

En el caso particular de matrices cuadradas, existe el elemento neutro, I, tal que:

A · I = I · A = A

En general, tratándose de matrices cuadradas, no se cumple la propiedad conmutativa.

Un ejemplo de producto de A · B, ambas de dimensión 2 x 2 que no cumplan la propiedad conmutativa puede ser:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \;;;\; B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix} \;\Rightarrow \begin{cases} A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}2 & 10\\ 4 & 18\end{pmatrix}} \\ B\cdot A=A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}6 & 8\\ 10 & 14\end{pmatrix}} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{A\cdot B\neq B\cdot A}}$$

****

2º) Determinar un plano π que, pasando por el origen de coordenadas, sea paralelo a la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \end{cases}$, y también sea paralelo a la recta s que pasa por los puntos A(1, 1, 0) y B(0, 1, 1).

El plano pedido π, puede definirse por los vectores directores de las rectas r y s y por el punto O(0, 0, 0).

La expresión mediante ecuaciones paramétricas de la r es:

$$r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \end{cases} \quad \underline{z=k} \;\Rightarrow\; \left.\begin{cases} x+y=1 \rightarrow x=1-y=1-2+k=\underline{-1+k=x} \\ \underline{y=2-k} \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=-1+k \\ y=2-k \\ z=k \end{cases}}$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{u}=(1,\,-1,\,1)$.

Un vector director de s es: $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}=B-A=(0,\,1,\,1)-(1,\,1,\,0)=(-1,\,0,\,1)$

$$\pi(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \;\;;;\;\; -x-y-z-y=0 \;\;;;\;\; \underline{\underline{\pi \equiv x+2y+z=0}}$$

****

3º) Representar gráficamente la figura plana limitada por la curva $y = e^x$, su recta tangente en el punto de abscisa x = 0, y la recta x = 1. Calcular su área.

El punto de tangencia es: $\left.\begin{cases} x = 0 \\ y_{(0)} = e^0 = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{A(0,\ 1)}$

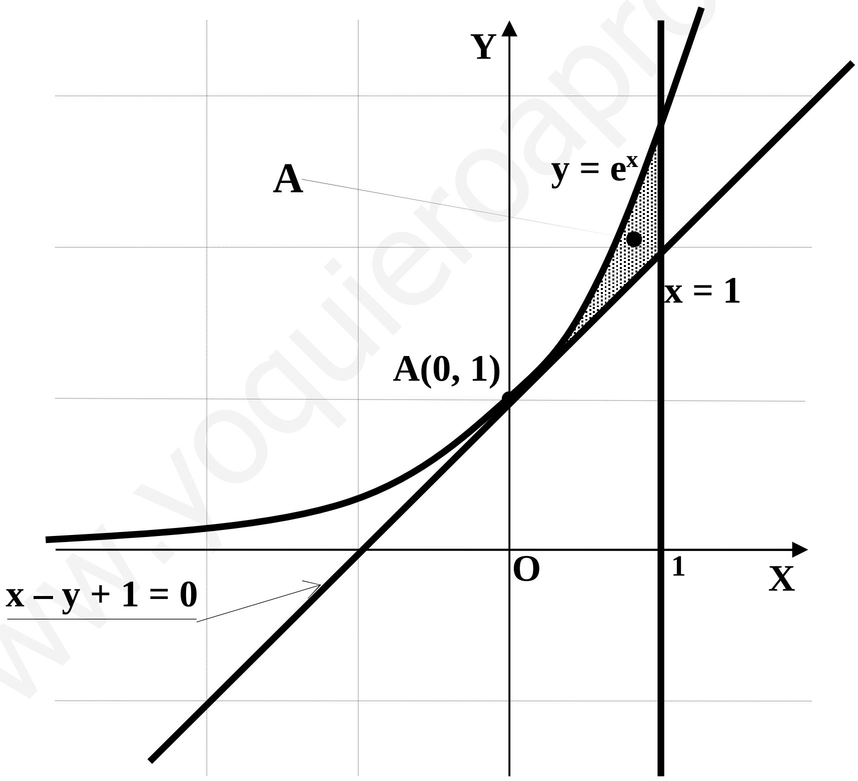
La pendiente de la recta tangente es m, que se obtiene como sigue:

$$y = e^x \ \ ;; \ \ y' = e^x \ \Rightarrow \ m = y'(0) = e^0 = 1$$

Sabiendo que la expresión de una recta conocida la pendiente viene dada por la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$, la ecuación de la tangente, t, es la siguiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \ \Rightarrow \ y - 1 = 1 \cdot (x - 0) \ ;; \ t \equiv x - y + 1 = 0$$

La representación gráfica de la situación es la que sigue:



$$A = \int_0^1 \left[e^x - (x+1)\right] \cdot dx = \int_0^1 \left(e^x - x + 1\right) \cdot dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = \left(e - \frac{1}{2} + 1\right) - \left(e^0 - 0 + 0\right) =$$

$$= e - \frac{1}{2} + 1 - 1 = \underline{\underline{\frac{2e-1}{2}\, u^2 = A}}$$

****

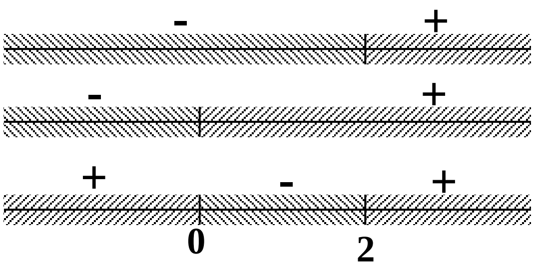
4º) Determinar en qué puntos es negativa la derivada de la función $f(x) = e^x \cdot x^{-2}$.

$$f(x) = e^x \cdot x^{-2} = \frac{e^x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \underline{\frac{e^x(x-2)}{x^3} = f'(x)}$$

Para determinar el signo de la derivada es necesario estudiar el numerador y el denominador, teniendo en cuenta que $e^x > 0, \ \forall x \in R$.

$$\left.\begin{array}{l} Numerador > 0 \Rightarrow x > 2 \\ \\ Denominador > 0 \Rightarrow x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{f'(x) > 0 \Rightarrow (-\infty, 0) \cup (2, \infty)}}$$

Es esquema siguiente facilita la compresión de la solución.



Numerador

Denominador

<u>**f'(x) > 0 → (-∞, 0) U (2, ∞)**</u>

****